INSA 1er cycle

Algèbre

Nombres complexes

Exercice 1 Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$; b) $z_2 = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1789}$; c) $z_3 = \dfrac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$;

d) $z_4 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}$; en déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que

a) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$; a') $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 3$;

b) $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit réel ; b') $\dfrac{z+1}{z-1}$ soit imaginaire pur.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{2i\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$.

a) Déterminer les racines carrées de $8-6i$ et en déduire les antécédents de $1+i$ par f.

b) Soit $u \in \mathbb{C}$. Déterminer le nombre d'antécédents de u par f. L'application f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 4

a) Déterminer les racines sixièmes complexes de -27.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Exercice 5 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\beta}$. (On introduira une suite géométrique ; on rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ si $r \neq 1$.)
2. On pose $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\beta)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(\alpha + k\beta)$. En considérant le nombre complexe $S_1 + i\,S_2$, déduire de la question précédente la valeur des sommes S_1 et S_2.

Exercice 6

1. On définit le nombre complexe $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\,2\pi/3}$.
   (a) Calculer j^3, puis plus généralement j^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Comparer j^2 et $\bar{j}$. En déduire $1+j+j^2$ et $1+j^2+j^4$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'inconnues u, v, w et de paramètres complexes a, b, c suivant :
   $$(S_{a,b,c}) : \begin{cases} u + v + w = a \\ u + j\,v + j^2\,w = b \\ u + j^2\,v + j\,w = c \end{cases}$$
   On pourra effectuer des combinaisons ad hoc des équations précédentes.
   (b) Comment faut-il choisir les paramètres a, b, c pour que u, v, w soient des nombres réels ?
3. Application : soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On définit les sommes
   $$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{E[n/3]} \binom{n}{3k}, \quad \Sigma_2 = \sum_{k=0}^{E[(n-1)/3]} \binom{n}{3k+1}, \quad \Sigma_3 = \sum_{k=0}^{E[(n-2)/3]} \binom{n}{3k+2},$$
   où $E[x]$ désigne la partie entière du réel x.
   (a) On rappelle la formule du binôme : $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
   Déterminer les nombres a, b, c pour que $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ satisfassent au système $(S_{a,b,c})$.
   (b) En déduire la valeur des sommes $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On pose $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

1. Prouver que l'expression $\dfrac{(X+1)^n - 1}{X}$ définit un polynôme P dont on précisera les coefficients.
2. Déterminer les racines du polynôme P dans $\mathbb{C}$, puis calculer leurs modules et arguments.
3. Montrer que les images dans le plan complexe de ces racines sont des points cocycliques.
4. Déterminer sans calcul le produit des racines de P. En déduire la valeur du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

1. Vérifier que $\sin\theta = \dfrac{e^{i\,\theta}}{2i}\,(1 - e^{-i\,2\theta})$.
2. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{i\,(2k\pi/n)}) = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$.
3. En déduire la valeur du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$.