INSA 1er cycle

Géométrie

Coniques, courbes paramétrées

Exercice 1

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, identifier, donner une représentation paramétrique puis construire les courbes d'equations suivantes :

   a) $x^2+4\,y^2+x+6\,y=0$ b) $6\,x^2+2\,y^2-12\,x+8\,y+9=0$

   c) $x^2-y^2+2\,x-8\,y=8$ d) $2\,x^2-y^2+4\,x=3$

   e) $y^2=2\,y+x$ f) $x^2=3\,x+y-1$

Exercice 2 On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct. À tout point M d'affixe $z\neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$.

1. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où $x,y,x',y'\in\mathbb{R}$.
   (a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe réel.
2. On suppose maintenant que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2. L'affixe de M est alors de la forme $z=2e^{it}$ avec $t\in[0,2\pi[$.
   (a) Exprimer x' et y' en fonction de t.
   (b) En déduire que M' décrit une conique que l'on caractérisera et que l'on dessinera.

Exercice 3 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient $a,b>0$ et (H) l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

On pose $\vec{u}=\frac{1}{2}(a\vec{i}-b\vec{j})$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}(a\vec{i}+b\vec{j})$.

1. Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. On note respectivement (x,y) et (X,Y) les coordonnées d'un point M dans les repères $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $(O;\vec{u},\vec{v})$. Exprimer x et y en fonction de X et Y.
3. En déduire l'équation de (H) dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 4 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit (E) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient l'équation

$$x^2-y^2-2\,xy\sqrt{3}+2=0.$$

1. On considère la transformation φ du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe jz où $j=(-1+i\sqrt{3})/2$. Montrer que φ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2. On désigne par (H) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\Re(z^2)=1$. Identifier la nature de (H) et le représenter.
3. Montrer qu'un point $M(z)$ appartient à (E) si et seulement si $\Re((jz)^2)=1$.
4. Montrer que (H) est l'image de (E) par φ. En déduire la nature de (E) puis représenter (E) sur la figure précédente.

Exercice 5 Construire les courbes paramétrées suivantes :

a) $\begin{cases} x(t) = 3\,t^2-2 \\ y(t) = 3\,t-t^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = 2\cos t-\cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t-\sin(2t) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{1}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{2}{t+1}-\dfrac{1}{t-1} \end{cases}$

Exercice 6 Déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par le point M_t construit sur la figure ci-dessous lorsque le point $m_t(\cos t,\sin t)$ décrit le cercle trigonométrique. Tracer cette courbe.