INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Dérivation

Exercice 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arctan(e^x), \quad g(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)), \quad h(x) = \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 On considère la famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

Montrer que les tangentes des courbes représentatives des f_λ au point d'abscisse 0 sont parallèles et que celles au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Remarque. — Le deuxième résultat subsiste pour tout point d'abscisse non nulle.

Exercice 3 On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1, \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right),$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right)$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ ainsi que les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.
   (b) Donner le signe de f''. En déduire celui de f' puis celui de f sur $]0,+\infty[$.
2. Mener une étude analogue avec la fonction g.
3. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de f et de n. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. (a) À l'aide du signe de g, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$:
   $$\ln(k) > \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k-1) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$
   (b) En sommant cette inégalité pour k variant de 2 à n, en déduire
   $$\ln(n!) > \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + 1 - \frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$
   puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée.
5. Conclure.

On obtient la célèbre formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\, n^{n+1/2}e^{-n}$ (où la notation $f \sim g$ signifie que $\lim f/g = 1$). On verra plus tard que la constante λ est égale à $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 4 Soit $a \in \mathbb{R}$, $x_0 \in]0,+\infty[$ et $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } 0 < x < x_0, \\ x^2 + 12 & \text{si } x \geqslant x_0. \end{cases}$$

Déterminer a et x_0 pour que f soit dérivable sur $]0,+\infty[$. Est-elle alors de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 5 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Donner une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 6 (Fonction « argument sinus hyperbolique »)

1. Montrer que la fonction $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective. On note sa réciproque argsh (« argument sinus hyperbolique »). Donner une écriture explicite de $\operatorname{argsh}(x)$ et calculer $\operatorname{argsh}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{\operatorname{argsh} x}{\ln 2}\right)$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour x convenable. Préciser l'ensemble de définition de f'.
   (c) Montrer que f induit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un intervalle que l'on précisera. Expliciter alors la bijection réciproque f^{-1} et calculer sa dérivée.

Exercice 7 On considère les fonctions f, g et h définies pour $x \neq 0$ selon

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad h(x) = x^2\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

et pour $x = 0$, $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. Pour chacune des fonctions f, g et h,

1. déterminer l'ensemble des points où la fonction est continue ; dérivable ; de classe $\mathcal{C}^1$;
2. étudier la nature de la branche infinie de la courbe représentative lorsqu'il y en a une et préciser la position relative de la courbe par rapport à cette branche infinie. Pour h, on calculera la limite $\lim\limits_{u\to0} \frac{\sin(u)-u}{u^2}$. On pourra utiliser la règle de l'Hôpital ou l'inégalité des accroissements finis relative à l'application $u \mapsto \sin(u) - u$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier le fait que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que si f' est croissante sur $\mathbb{R}$, alors g l'est également.
4. Montrer à l'aide de la règle de l'Hôpital que
   (a) si f est deux fois dérivable en 0, alors g est dérivable en 0. Calculer alors $g'(0)$;
   (b) si f est de classe $\mathcal{C}^2$ en 0, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 9 Soit $\alpha \geqslant 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Prouver à l'aide du théorème des accroissements finis l'inégalité $\forall x > 1,\ \frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Prouver à l'aide du théorème des accroissements finis l'encadrement $\forall x > 1$, $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1)$. En déduire un encadrement de u_n lorsque $n \to +\infty$ à l'aide de la fonction ln. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ainsi que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)}$.

Exercice 10 (Formule des trapèzes)

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et g l'application affine telle que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. On pose $I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $J = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$ puis calculer l'intégrale J. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. On souhaite majorer l'écart entre Iet J. Pour cela, on introduit l'application φ définie sur $[a, b]$ par
$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(x-a)\,[f(x) + f(a)] - K(x-a)^3$$
où K est la constante déterminée par la condition $\varphi(b) = 0$.
   (a) Calculer φ' et φ''.
   (b) Par utilisations répétées du théorème de Rolle, prouver l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que $K = -\frac{1}{12} f''(c)$.
   (c) En déduire que $I - J = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(c)$ puis que $|I - J| \leqslant M\,\frac{(b-a)^3}{12}$.
3. On introduit une subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de l'intervalle $[a, b]$ en posant $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Vérifier que l'on a
$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2n}\,[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] + \varepsilon_n}$$
avec $|\varepsilon_n| \leqslant M\,\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.
4. Application numérique : à partir de quelle valeur de n peut-on obtenir une approximation de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(2)$ à l'aide de la formule précédente avec une erreur inférieure à 10^{-6} ?

Exercice 11

1. Calculer les dérivées successives de la fonction sinus jusqu'à l'ordre 7.
2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange relative à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. Obtenir une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-3} près.

Exercice 12 On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x)$.

1. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 5.
2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange relative à f sur l'intervalle $[0, x]$ pour $x > 0$.
3. Prouver l'encadrement $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ valable pour tout $x > 0$.
4. Pour quelles valeurs de x la quantité $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ définit-elle une valeur approchée de $\ln(1 + x)$ à 10^{-5} près ?

Pour les insatiables...

Exercice 13 (Théorème de Rolle généralisé)

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. On pourra appliquer le théorème de Rolle à l'application $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(0) = f(a)$ et pour $x \in]0, 1]$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right)$.

Exercice 14 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$.

1. Montrer que les polynômes $4x^3 - 3x - 1$ et $4x^3 - 3x + 1$ admettent une racine réelle double. Les factoriser puis étudier leur signe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathcal{D}_f$?
4. Calculer $f'(x)$ pour x convenable.
5. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{f'}$ de la fonction dérivée f'.
6. En remarquant que f' s'exprime à l'aide de la dérivée de la fonction arccosinus, exprimer $f(x)$ en fonction de $\arccos x$ sur $\mathcal{D}_f$.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 15 Soit a, b, c trois nombres réels et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
Pour quelle(s) valeurs de a, b et c l'application f est-elle : continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$? dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$? dérivable 3 fois sur $\mathbb{R}$? dérivable 4 fois sur $\mathbb{R}$?

Exercice 16 (Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f, g deux fonctions n fois dérivables en un réel x_0. Montrer par récurrence que la dérivée n^{e} de fg en x_0 est donnée par la formule de Leibniz *(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716)* :
$$\boxed{(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0).}$$
Exemple. — Calculer la dérivée n^{e} de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^3 \mathrm{e}^x$.

Exercice 17 (Théorème des accroissements finis généralisés)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que, pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. (On pourra introduire la fonction h définie par $h(x) = [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)] - [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)]$.)

Remarque. — La règle de L'Hôpital découle du théorème des accroissements finis généralisés.

Exercice 18 (Théorème de Darboux)
Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$. On introduit les fonctions g et h suivantes :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \in]a, b] \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si } x \in [a, b[\\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

1. Justifier que g et h sont continues sur $[a, b]$. Comparer $g(b)$ et $h(a)$.
2. Soit y un nombre réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = y$. (On pourra remarquer que y est compris soit entre $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, soit entre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $f'(b)$, et l'on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis.)

La fonction dérivée f vérifie donc le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux).

Exercice 19

1. Soit $\varphi : I \longrightarrow]0, +\infty[$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) I de $\mathbb{R}$ et $\psi = \sqrt{\varphi}$. Calculer $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$ pour tout $x \in I$.
2. On choisit pour φ une fonction polynôme de degré 2 de la forme $\varphi(x) = x^2 + 2ax + b$ (a, b étant des réels fixés) et pour I l'ensemble des réels x tels que $\varphi(x) > 0$.
   (a) Écrire $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$ pour tout $x \in I$. Étudier les signes de ψ' et ψ'' sur I (on discutera selon le signe de $a^2 - b$).
   (b) Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de ψ en $\pm\infty$, puis préciser la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.
   (c) Exemple. — Tracer sur un même graphique les courbes relatives aux cas où $a = 2, b = 5$ et $a = 2, b = -5$.

Exercice 20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. (a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$; on notera encore f ce prolongement.
   (b) Montrer que f ainsi prolongée est de classe sur $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe en $x = 1/2$.
   (b) Déterminer l'abscisse du point de la courbe où la tangente passe par l'origine du repère.
5. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
6. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n de degré $2n - 2$ (que l'on ne cherchera pas à calculer) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$
   (b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 (Polynômes de Legendre)
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynôme P_n selon $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où $Q_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Quel est le degré de P_n ?
2. Déterminer les racines de Q_n et préciser leur ordre de multiplicité.
3. Montrer à l'aide d'utilisations répétées du théorème de Rolle que la fonction P_n admet n racines réelles distinctes.

Exercice 22 (Polynômes d'Hermite)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence qu'il existe une fonction polynôme P_n de degré n tel que la dérivée n-ième de f s'exprime selon la formule $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Écrire P_1, P_2 et P_3. Les P_n sont appelés polynômes d'Hermite *(Charles Hermite, 1822–1901)*
3. Calculer les limites de $f^{(n)}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
4. En utilisant le théorème de Rolle plusieurs fois, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ s'annule en exactement n points de $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour les racines du polynôme P_n ?
5. En appliquant la formule de Leibniz à f', prouver la relation de récurrence
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+2}(x) + 2x\, P_{n+1}(x) + 2(n+1)\, P_n(x) = 0.$$
6. En dérivant la relation $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ et en utilisant la relation précédente, montrer que l'on a l'égalité $P'_{n+1}(x) + 2(n+1)P_n(x) = 0$, puis la suivante : $P''_{n+2}(x) - 4(n+2)(n+1)P_n(x) = 0$.
7. Déduire des deux questions précédentes que P_n satisfait à l'équation différentielle (*équation d'Hermite*) :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P''_n(x) - 2x\, P'_n(x) + 2n\, P_n(x) = 0.$$