INSA 1^{er} cycle

Algèbre linéaire

Déterminants, systèmes linéaires

Exercice 1 Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer les déterminants suivants (on exprimera leur valeur sous une forme factorisée) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tAA$ puis en déduire $\det(A)$.

Exercice 2 Soient a_1, a_2, …, a_n, a et b des nombres réels. Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 (Déterminant de Vandermonde) Soient a_1, a_2, …, a_n des nombres réels.

1. Calculer le déterminant

$$D_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

   Indication : si $\vec{u}_i$ représente la i^{e} colonne, alors $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2 - a_n\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i - a_n\vec{u}_{i-1}, \dots, \vec{u}_n - a_n\vec{u}_{n-1})$, ce qui fournit une relation de récurrence pour la suite $(D_n(a_1, a_2, \dots, a_n))_{n\geqslant 1}$.

   Résultat : $D_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$.

2. Application 1.
   (a) En développant $D_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ considéré comme un polynôme de la variable a_i par rapport à la j^{e} ligne, calculer le $(i, j)^{\text{e}}$ cofacteur de ce déterminant. On utilisera les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.
   (b) On suppose les réels a_1, a_2, …, a_n tous distincts. En déduire la solution du système de Cramer

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & \alpha \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_1^{n-2}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \cdots + a_n^{n-2}x_n & = & 0 \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n & = & \beta \end{array}\right.$$

3. Application 2.
   On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'un système infini S de vecteurs de E est libre si tout système fini extrait de S est libre.
   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur e_a de E par $\forall x \in \mathbb{R}$, $e_a(x) = e^{ax}$. Montrer que le système infini de vecteurs $\{e_a, a \in \mathbb{R}\}$ est libre.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1. Étudier, en fonction du paramètre réel a et de la parité de l'entier n, le rang du système de vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ défini par

$$\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + a\vec{e}_n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\},\ \vec{u}_i = a\vec{e}_{i-1} + \vec{e}_i.$$

2. Déterminer, suivant les valeurs des réels b_1, b_2, …, b_n et la parité de n, le nombre de solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} x_i + x_{i+1} = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ x_1 + x_n = b_n. \end{array}\right.$$

3. Application.
   Dans le plan réel rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, déterminer
   (a) les triangles ayant pour milieux des côtés les trois points $A(1, 0)$, $B(0, 0)$ et $C(0, 1)$;
   (b) les quadrilatères ayant pour milieux des côtés les quatre points A, B, C et $D(1, 1)$. Plus généralement, de quel type doit être le quadrilatère $ABCD$ pour qu'il existe des quadrilatères ayant $ABCD$ pour milieux des côtés ?