Développements limités

Exercice 1 La formule de Taylor-Lagrange assure l'existence d'une fonction θ à valeurs dans $]0,1[$ telle que $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\theta(x)x}$ et la formule de Taylor-Young fournit le développement limité $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
L'objectif de cet exercice est de calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.

1. Première méthode.
   (a) Donner deux équivalents simples de $e^{\theta(x)x} - 1$ en 0.
   (b) En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.
2. Deuxième méthode.
   (a) Calculer explicitement $\theta(x)$.
   (b) À l'aide d'un équivalent de $\ln u$ en 1, retrouver la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$.

Exercice 2 Déterminer le développement limité d'ordre 5 en 0 de chacune des fonctions f définies ci-dessous par

a) $f(x) = \mathrm{ch}\,(2x)\,\mathrm{sh}\,(3x)$; b) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$; c) $f(x) = e^{\cos x}$.

Exercice 3 Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions f définies ci-dessous par

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x-2x^2-2x^3}$; b) $f(x) = \dfrac{3-4x+2x^2}{3-7x}$; c) $f(x) = \dfrac{1-x}{1-2x-x^2}$.

Exercice 4 Déterminer le développement limité d'ordre 4 en 0 de chacune des fonctions f définies ci-dessous par

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; b) $f(x) = \dfrac{6x^2}{\ln(2x+1)}$; c) $f(x) = [\cos(2x)]^{3/x^2}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ (utiliser les développements limités d'ordre 7 de $\sin x$ et $\mathrm{sh}\,x$ ainsi que le développement limité d'ordre 3 de $(1+u)^{-2}$).

Exercice 5 Déterminer les développements limités d'ordre 4 et 3 respectivement en $\pi/2$ des fonctions définies ci-dessous par

a) $f(x) = \ln(\sin x)$; b) $f(x) = (1+\cos x)^{1/(x-\pi/2)}$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2-1)\arctan\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$.

1. En utilisant la formule $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ si $x > 0$, $= -\pi/2$ si $x < 0$, obtenir les développements limités de f en $(1/2)^+$ et $(1/2)^-$ d'ordre 2.
2. Déterminer un développement asymptotique en $\pm\infty$ de la forme
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
3. En déduire la représentation graphique locale de f aux voisinages de $1/2$ et de $\pm\infty$.

Exercice 7 À l'aide de développements limités d'ordre 4 et 7 respectivement, calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{ch}\ x)+\ln(\cos x)}{\sqrt{\mathrm{ch}\ x}+\sqrt{\cos x}-2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 x - x^5}$.

Exercice 8

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + 12\,\mathrm{sh}(x) + x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0,\\ 1 & \text{si } x = 0.\end{cases}$
   (a) Montrer que f est dérivable en 0 et par conséquent possède un développement limité d'ordre 1 en 0 que l'on déterminera.
   (b) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0, mais qu'elle possède cependant un développement limité d'ordre 2 en 0 que l'on déterminera.
   (c) Montrer que f' ne possède pas de développement limité d'ordre 1 en 0.
   (d) Montrer que la courbe représentative de f traverse sa tangente au point d'abscisse 0 mais que ce point n'est pas un point d'inflexion.
2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \sin(x) + x^2\ln|x| & \text{si } x \neq 0,\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}$
   (a) Montrer que f est dérivable en 0 et par conséquent possède un développement limité d'ordre 1 en 0 que l'on déterminera.
   (b) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0 et ne possède pas de développement limité d'ordre 2 en 0.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est bijective puis calculer le développement limité de f d'ordre 3 en 0.
2. Rechercher le développement limité de f^{-1} d'ordre 3 en 0 sous la forme $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o(y^3)$, a, b, c étant trois réels à déterminer.
3. Calculer les trois premières dérivées de f^{-1} en 0.

Exercice 10 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

1. Calculer la fonction dérivée f'.
2. Effectuer le développement limité d'ordre 11 en 0 de f'.
3. En déduire le développement limité d'ordre 12 en 0 de f.
4. À l'aide d'un changement de variable dans l'intégrale, exprimer $f(1/x)$ en fonction de $f(x)$.
5. Donner alors le développement limité d'ordre 12 en $+\infty$ de f.