INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Équations différentielles

N.B. Les notations $\dot u$ et $\ddot u$ désignent les dérivées première et seconde de la fonction u.

Exercice 1 Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

a) $\dot u(t)+6\,u(t)=3\,\mathrm{e}^{-3t}+6$; b) $\dot u(t)+3\,u(t)=\mathrm{e}^{-3t}$; c) $\dot u(t)+2\,u(t)=5\sin(t)$;

d) $\dot u(t)+u(t)=2\,\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)$; e) $\dot u(t)+u(t)=4\,\mathrm{e}^{t}\cos(2t)$.

Exercice 2

1. Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles
$$\dot u(t)+u(t)=2\cos(t)\quad\text{et}\quad \dot u(t)+u(t)=10\cos(3t).$$
2. En déduire la solution générale de (E) : $\dot u(t)+u(t)=40\cos^3(t)$.
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $u(0)=0$.

Exercice 3 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes et vérifier que dans chacun des cas, toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

a) $\ddot u+3\,\dot u+2\,u=0$; b) $\ddot u+6\,\dot u+9\,u=0$; c) $\ddot u+\dot u+u=0$.

Remarque. — Le résultat observé sur ces exemples se généralise au cas de toutes les équations $\ddot u+a\,\dot u+b\,u=0$ à coefficients a,b positifs.

Exercice 4 Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

a) $\ddot u(t)+5\dot u(t)+6\,u(t)=2\,\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}$; b) $\ddot u(t)+\dot u(t)+2\,u(t)=2\cos(t+\pi/3)$;

c) $\ddot u(t)+4\,\dot u(t)+4\,u(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos(\omega t)$ (ω étant un réel fixé ; on examinera les cas $\omega\neq 0$ et $\omega=0$).

Exercice 5 Soit $a,b\in\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $\ddot u(t)+4\,\dot u(t)+13\,u(t)=10\,\mathrm{e}^{-t}$.
2. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $u(0)=a$ et $\dot u(0)=b$.
3. Existe-t-il des solutions de (E) qui tendent vers 0 en $+\infty$?
4. Reprendre l'exercice avec l'équation $\ddot u(t)-4\,\dot u(t)+13\,u(t)=9\,\mathrm{e}^{-t}$.

Exercice 6 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ qui vérifie l'équation
$$(E):\quad x^2f''(x)+3\,xf'(x)+5\,f(x)=13\,x^2.$$

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $g(t)=f(\mathrm{e}^t)$. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants satisfaite par g. Résoudre cette équation.
2. En déduire les solutions de (E).

Pour les insatiables...

Exercice 7 On cherche à déterminer les fonctions dérivables $f:\,]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifiant la relation
$$(E):\quad f'(x)=f\left(\frac{2}{9\,x}\right)\ \text{pour tout } x\in\,]0,+\infty[\,.$$

1. Justifier le fait que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifier qu'elle est solution de l'équation différentielle (E') : $x^2f''(x)+(2/9)\,f(x)=0$, $x\in\,]0,+\infty[$.
2. On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=f(\mathrm{e}^t)$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E'') : $g''(t)-g'(t)+(2/9)\,g(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$.
3. Déterminer les solutions de (E''). En déduire celles de (E') puis celles de (E).
4. Reprendre l'exercice avec la relation (E) : $f'(x)=f(1/(4\,x))$ pour tout $x\in\,]0,+\infty[$.

Exercice 8 (Oscillateur harmonique forcé)
On fixe des réels φ,x_0,v_0 et l'on considère l'équation différentielle dépendant d'un paramètre $\omega>0$ suivante :
$$(E_\omega):\quad \ddot x(t)+\omega^2x(t)=\cos(\omega t+\varphi).$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E_ω).
2. Rechercher une solution particulière de (E_ω) de la forme $t\longmapsto At\sin(\omega t+\varphi)$.
3. Déterminer la solution x_ω de (E_ω) vérifiant les conditions initiales $x_\omega(0)=x_0$ et $\dot x_\omega(0)=v_0$.
4. Montrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange que $\displaystyle\lim_{u\to0}\frac{\sin(u)-u}{u^2}=0$.
5. Calculer alors pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ la limite $\displaystyle\lim_{\omega\to0^+}x_\omega(t)$ que l'on notera $x_0(t)$.
6. Comparer la fonction x_0 à la solution de l'équation différentielle (E_0) : $\ddot x(t)=\cos(\varphi)$ avec conditions initiales $x(0)=x_0$ et $\dot x(0)=v_0$.

Exercice 9 On fixe des réels a,b,α,β et l'on considère l'équation différentielle dépendant d'un paramètre $\varepsilon>0$ suivante :
$$(E_\varepsilon):\quad \varepsilon\ddot u(t)+a\dot u(t)+bu(t)=0.$$

1. On suppose $a>0$.
Le paramètre ε est supposé suffisamment petit de telle sorte que $a^2-4b\varepsilon>0$.
   (a) Déterminer les racines $r_1(\varepsilon)$ et $r_2(\varepsilon)$ de l'équation $\varepsilon r^2+ar+b=0$.
   (b) Déterminer la solution u_ε de (E_ε) vérifiant les conditions initiales $u_\varepsilon(0)=\alpha$ et $\dot u_\varepsilon(0)=\beta$.
   (c) Calculer les limites de $r_1(\varepsilon)$ et $r_2(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon\to0^+$.
   (d) Représenter graphiquement la parabole $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ d'équation $u=\varepsilon t^2+at+b$ et préciser la « tendance » de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon\to0^+$.
   (e) Pour chaque $t\in\mathbb{R}^+$, calculer lorsqu'elle existe la limite $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}u_\varepsilon(t)$ que l'on notera $u_0(t)$. Comparer la fonction u_0 à la solution de l'équation différentielle (E_0) : $a\dot u(t)+bu(t)=0$ avec condition initiale $u(0)=\alpha$.
2. On suppose $a=0$. Reprendre l'étude précédente en distinguant les cas $b>0$, $b<0$ et $b=0$.