INSA 1^{er} cycle

Analyse

Fonctions d'une variable : fonctions élémentaires

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\arcsin(2x) - \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin x$;

b) $2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;

c) $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de calculer exactement l'angle $\theta = \dfrac{1}{4}\left(\arctan\dfrac{1}{239} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1. Calculer numériquement $\tan(4\theta)$.
2. Exprimer $\tan(4\theta)$ en fonction de $x = \tan\theta$.
3. Montrer alors que x vérifie une équation de degré 4 symétrique que l'on résoudra en introduisant l'inconnue auxilliaire $y = x - \dfrac{1}{x}$.
4. En déduire la valeur de x.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(ka)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(ka)$.

1. Calculer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$.
2. En déduire alors la valeur des sommes S_1 et S_2. On exprimera le résultat à l'aide de fonctions hyperboliques et de $a/2$.

Exercice 4 On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Vérifier l'égalité $\operatorname{th} x = 2\coth(2x) - \coth x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   (b) Calculer alors la somme $S(x)$.
2. (a) Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \operatorname{th} x$. En déduire une primitive de S.
   (b) En utilisant la relation $\operatorname{ch} x = \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh} x}$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, calculer le produit $P(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(2^k x)$ puis $Q(x) = \ln P(x)$.
   (c) Dériver la fonction Q et retrouver la valeur de $S(x)$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$.

1. Factoriser les polynômes $4X^3 - 3X - 1$ et $4X^3 - 3X + 1$, puis étudier leur signe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathcal{D}_f$?
4. Calculer $f'(x)$ pour x convenable.
5. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{f'}$ de la fonction dérivée f'.
6. En remarquant que f' s'exprime à l'aide de la dérivée de la fonction arccosinus, exprimer $f(x)$ en fonction de $\arccos x$ sur $\mathcal{D}_f$.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 6 On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{\operatorname{argsh} x}{\ln 2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer $f'(x)$ pour x convenable. Préciser l'ensemble de définition de f'.
3. Montrer que f induit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un intervalle que l'on précisera. Expliciter alors la bijection réciproque f^{-1} et calculer sa dérivée.

Exercice 7 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{\sin x + 1}{2}} - \arcsin\sqrt{\frac{\cos x + 1}{2}}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est périodique.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
3. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$ convenable.
4. Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_{f'}$ des points où f est dérivable.
5. Simplifier alors l'expression de $f(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$ puis tracer son graphe.

Exercice 8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie par $f(x) = \arccos(1 - x^n)$.

1. Montrer que $\arccos y \underset{y \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-y}$ et $\pi - \arccos y \underset{y \to -1^+}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1+y}$.
   On pourra utiliser l'équivalent $1 - \cos z \underset{z \to 0^+}{\sim} \frac{1}{2} z^2$.
2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
3. Donner les valeurs de l'entier n pour lesquelles la fonction f est dérivable en 0 à droite. Calculer la dérivée $f'(0)$ lorsqu'elle existe.
4. La fonction f est-elle dérivable en $2^{1/n}$?
5. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{f'}$ de f'. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'} \setminus \{0\}$.
6. Étudier les variations de f puis tracer son graphe pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.