INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Intégration

Exercice 1 En utilisant des sommes de Riemann, déterminer la limite de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}\ ; \quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt[3]{n^3+k^3}}\ ; \quad u_n = \frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{1/n} \text{ (calculer } \ln(u_n)\text{).}$$

Exercice 2

1. Montrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange que pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$, $|\ln(1+x) - x| \leqslant 2x^2$.
2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Déduire de la question précédente la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]$. On considérera $\ln(u_n)$ et l'on calculera $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)^2$.

Exercice 3 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x E(u)\,\mathrm{d}u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Par des considérations géométriques, calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On distinguera les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$; on pourra introduire $n = E(x)$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $F(1-x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on distinguera les cas $x \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. En déduire que la courbe représentative de F présente une symétrie que l'on précisera.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $F_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $F_0 = f$.

1. Calculer F_1', F_2', F_2'', F_3', F_3'' et F_3'''.
2. À l'aide de la formule du binôme, montrer que $F_n' = F_{n-1}$, puis que $F_n^{(k)} = F_{n-k}$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
3. Montrer que F_n est l'unique primitive n^{e} de f s'annulant en 0 ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $(n-1)$. Déterminer enfin toutes les primitives n^{e} de f.

Exercice 5 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \arccos\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(\pi/4)$.
2. Exprimer $f(x+\pi)$ et $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire un intervalle d'étude pour f.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$. En déduire une expression simple de f.
4. Retrouver directement le résultat précédent à l'aide des changements de variables respectifs $t = \cos^2(\theta)$ et $t = \sin^2(\theta)$ puis d'une intégration par parties dans chacune des deux intégrales apparaissant dans $f(x)$.

Exercice 6 On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, obtenir une équation vérifiée par $F(x)$. En déduire l'expression explicite de $F(x)$.
2. À l'aide de la relation $\cos(bt) = \Re e\left(\mathrm{e}^{ibt}\right)$, retrouver le résultat précédent.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{4x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est paire et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On pourra introduire une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$.
2. À l'aide d'une formule de la moyenne, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \ln(4)$.
3. On prolonge f en 0 en posant $f(0) = \ln(4)$. Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.
4. Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et calculer $f''(0)$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8

1. Déterminer une primitive de $t \mapsto \sin(at)\sin(bt)$ où $a, b \in\ ]0, +\infty[$ sont fixés. On distinguera les cas $a \neq b$ et $a = b$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kt)$. Calculer $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\sin(\ell t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer une primitive.

1. Fonctions élémentaires :

   $f(x) = (x^3+1)\,\mathrm{e}^{-x}$; $f(x) = x^2\ln|x+1|$; $f(x) = \cos(x)\sin(2x)$; $f(x) = \sin(x)\,\mathrm{sh}(x)$.
2. Fonctions rationnelles :

   $f(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$; $f(x) = \dfrac{5x^5+10}{(x+1)^5 - x^5 - 1}$ (poser $\mathrm{j} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ et remarquer que $\mathrm{j}^3 = 1$ et $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$).
3. Fonctions irrationnelles :

   $f(x) = \sqrt{(x-1)(5-x)}$ à l'aide du changement de variable $x = 2\sin(t) + 3$;

   $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+2x+8)^{3/2}}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{7}\,\mathrm{sh}(t) - 1$.

Exercice 10 (**Intégrale de Gauss**)

On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ (intégrale de Wallis). On admet que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

1. Partant de l'inégalité $\mathrm{e}^t \geqslant 1+t$ valable pour tout $t\in\mathbb{R}$, montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, $1-t \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$ puis que
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,n],\ \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}.$$
2. En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $A\in[\sqrt{n},+\infty[$ l'encadrement
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^A \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x.$$
3. À l'aide des changements de variables respectifs $x=\sqrt{n}\sin(\theta)$ et $x=\sqrt{n}\tan(\theta)$, exprimer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ en fonction d'une intégrale de Wallis et majorer $\displaystyle\int_0^A \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$ par une autre intégrale de Wallis.
4. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ci-dessous, appelée intégrale de Gauss *(Carl Friedrich Gauss, 1777–1855)* :
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Exercice 11 (**Intégrale de Wallis**)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis *(John Wallis, 1655)*
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x, \quad n\in\mathbb{N}.$$

1. Calculer W_0, W_1, W_2 et W_3.
2. À l'aide d'une intégration par parties, obtenir une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2}.
3. On pose $I_p = W_{2p}$ et $J_p = W_{2p+1}$. Écrire une relation de récurrence entre I_p et I_{p-1} ainsi qu'entre J_p et J_{p-1}, puis entre I_pJ_p et $I_{p-1}J_{p-1}$. En déduire des écritures explicites de I_p et J_p au moyen de factorielles.
4. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ à l'aide de la question 2.
5. On admet l'équivalence asymptotique $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\, n^{n+1/2}e^{-n}$ où λ est un réel positif que l'on va déterminer.
   (a) Obtenir pour I_p et J_p des équivalents de la forme $\dfrac{\alpha}{\sqrt{p}}$ et $\dfrac{\beta}{\sqrt{p}}$ où α et β sont des réels que l'on exprimera en fonction de λ.
   (b) Déduire de l'équivalence $I_p \underset{p\to+\infty}{\sim} J_p$ la valeur de λ. On obtient la célèbre formule de Stirling *(James Stirling, 1692–1770)* :
$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}.}$$

Exercice 12 Soit $p\in\mathbb{N}$. On considère l'équation différentielle
$$(E) : t\,\dot{u}(t) - p\,u(t) = t^{p+2}\sin t.$$

1. Déterminer la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$ ainsi que celle sur $]-\infty,0[$.
2. On examine les cas $p=1$ et $p=2$. L'équation (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions $u(1)=2$, $u(0)=0$, $u(0)=1$.

Exercice 13

1. Calculer une primitive de $\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ sur $]-1,1[$ à l'aide du changement de variables $t=\sin(\theta)$, $\theta\in\,]-\pi/2,\pi/2[$.
2. Calculer une primitive de $\dfrac{1}{(t^2-1)^{3/2}}$ sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ à l'aide des changements de variables respectifs $t=-\operatorname{ch}(\theta)$ et $t=\operatorname{ch}(\theta)$, $\theta>0$.
3. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(t^2-1)\,\dot{u}(t) = t\,u(t)-1$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$. Cette équation admet-elle des solutions définies sur $]-\infty,1[$? Sur $]-1,+\infty[$? Sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 14

1. Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x^2-x}$ ainsi qu'une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t-1}$ à l'aide du changement de variables $v=\mathrm{e}^t$.
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(\mathrm{e}^t-1)\,\dot{u}(t)+u(t) = t+1$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Cette équation admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(t^2-t)\,\dot{u}(t)+u(t) = t+1$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Cette équation admet-elle des solutions définies sur $]-\infty,1[$? Sur $]0,+\infty[$? Sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 15

1. Pour tout $\varepsilon>0$, résoudre l'équation différentielle $(t^2+\varepsilon^2)\,\dot{u}(t)+u(t)=1$ sur $]0,+\infty[$. (On pourra remarquer qu'elle admet une solution particulière très simple.) Déterminer la solution u_ε vérifiant $u_\varepsilon(1)=0$. Calculer, pour tout $t>0$, la limite $\lim_{\varepsilon\to0^+} u_\varepsilon(t)$ que l'on notera $u(t)$. Cela définit une application $u :]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution v de l'équation différentielle $t^2\,\dot{v}(t)+v(t)=1$ sur $]0,+\infty[$ vérifiant $v(1)=0$.
3. Comparer les fonctions u et v.

Exercice 16 Soit a et b des fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ainsi que $t_0\in I$. On considère l'équation différentielle (E) : $\dot{u}(t)+a(t)\,u(t)=b(t)$. On note $\{u_\lambda,\lambda\in\mathbb{R}\}$ l'ensemble des solutions de (E) et l'on appelle, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de u_λ.

1. Pour chaque $\lambda\in\mathbb{R}$, écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ à la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ au point de coordonnées $(t_0,u_\lambda(t_0))$.
2. On suppose que $a(t_0)\neq0$. Montrer que les droites $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, sont concourantes. On suppose que $a(t_0)=0$. Que peut-on dire des droites $\mathcal{T}_\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$?
3. Examiner l'exemple où $a(t)=b(t)=t$ et $t_0\in\{0,1\}$.

Pour les insatiables...

Exercice 17 Intégration par parties successives

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f, g deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$.

1. Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(i)}\, g^{(n-1-i)}\right)'(x) = f(x)\, g^{(n)}(x) + (-1)^{n-1} f^{(n)}(x)\, g(x)$.
2. En déduire la formule d'intégration par parties répétées :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f^{(i)}(x)\, g^{(n-1-i)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)^{(n)}\, g(x)\, \mathrm{d}x.}$$

3. Application. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et P une fonction polynôme. Montrer que la fonction $x \longmapsto P(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}$ admet une primitive de la forme $x \longmapsto Q(x)\, \mathrm{e}^{\alpha x}$ où Q une fonction polynôme de même degré que P.

   Exprimer, lorsque $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A P(x)\, \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} P(x)\, \mathrm{e}^{-\alpha x}\, \mathrm{d}x$ en fonction de α, P et n.

Exercice 18 (Fonction de Green)

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad \ddot{u}(t) - \omega^2\, u(t) = -f(t).$$

1. On introduit la fonction v définie par $v(t) = [\dot{u}(t) - \omega\, u(t)]e^{\omega t}$. Exprimer $\dot{v}$ puis v en fonction de f et ω. On pourra poser $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\, \mathrm{e}^{\omega s}\, \mathrm{d}s$.
2. On obtient une équation différentielle du premier ordre satisfaite par u. La résoudre puis déterminer la solution générale de (E).
3. Montrer que la solution de (E) vérifiant les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$ est donnée par

$$\boxed{u(t) = \int_0^1 G(s,t) f(s)\, ds}$$

   où $G : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ est la fonction de Green *(George Green, 1793–1841)* définie par

$$G(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(\omega(1-t))\ \mathrm{sh}(\omega s)}{\omega\ \mathrm{sh}\,\omega} & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{\mathrm{sh}(\omega t)\ \mathrm{sh}(\omega(1-s))}{\omega\ \mathrm{sh}\,\omega} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

   Indication : écrire $\int_0^1 = \int_0^t + \int_t^1$.

Exercice 19 (Inégalités de Hölder et de Minkowski)

Soit $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Que vaut q ? Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications continues. On pose $N_f = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$ et $N_g = \left(\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q\, \mathrm{d}x\right)^{1/q}$.

1. On introduit pour tous $\alpha, \beta, t > 0$, $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \dfrac{\alpha^p}{p}\, t^p + \dfrac{\beta^q}{q}\, \dfrac{1}{t^q}$.
   (a) Étudier les variations de $\varphi_{\alpha,\beta}$ sur $]0, +\infty[$.
   (b) Calculer la borne inférieure $\displaystyle\inf_{t>0} \varphi_{\alpha,\beta}(t)$.
2. Montrer alors que pour tout $t > 0$, $\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \varphi_{N_f,N_g}(t)$.
3. En déduire l'inégalité de Hölder *(Otto Hölder, 1859–1937)* :

$$\boxed{\int_a^b |f(x)g(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, \mathrm{d}x\right)^{1/q}.}$$

   Cas particulier : lorsque $p = 2$, alors $q = 2$ et on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\boxed{\int_a^b |f(x)g(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, \mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\, \mathrm{d}x}.}$$

4. En écrivant $[f(x) + g(x)]^p = [f(x) + g(x)][f(x) + g(x)]^{p-1}$, prouver l'inégalité de Minkowski *(Hermann Minkowski, 1864–1909)* :

$$\boxed{\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, \mathrm{d}x\right)^{1/p}.}$$

Exercice 20 (Lemme de Grönwall)

Soit $f, \varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ trois applications continues ; on suppose ψ positive et que $f(x) \leqslant \varphi(x) + \displaystyle\int_a^x \psi(y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$ pour tout $x \in [a, b]$. On pose $g(x) = \displaystyle\int_a^x \psi(y)\, f(y)\, \mathrm{d}y \times \mathrm{e}^{-\int_a^x \psi(z)\, \mathrm{d}z}$.

1. Calculer $g'(x)$. Montrer que $g'(x) \leqslant \varphi(x)\, \psi(x)\, \mathrm{e}^{-\int_a^x \psi(z)\, \mathrm{d}z}$.
2. À l'aide de la relation $g(x) = g(a) + \displaystyle\int_a^x g'(y)\, \mathrm{d}y$, Montrer le lemme de Grönwall *(Thomas Grönwall, 1877–1932)* :

$$\boxed{f(x) \leqslant \varphi(x) + \int_a^x \varphi(y)\, \psi(y)\, \mathrm{e}^{\int_y^x \psi(z)\, \mathrm{d}z}\, \mathrm{d}y.}$$

3. Cas particulier : lorsque $\varphi(x) = \alpha$, montrer que $f(x) \leqslant \alpha \left(1 + \mathrm{e}^{\int_a^x \psi(z)\, \mathrm{d}z}\right)$.