Limites, comparaison locale

Exercice 1 On rappelle que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$.

Calculer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - (\ln x)^3}{\operatorname{ch}^2 x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x) - 5x}{\operatorname{ch}(x) + \ln(x)}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(5x)}{1 - \cos(4x)}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[x^2(1 - \cos x)]}{(1 - \cos x)^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln|x| + 3 \cos\left(\frac{5}{x^2}\right) \right]$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3^x}}{3^{2^x}}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\ln^2(x)}$ j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\sqrt{\ln(x)}}$

Exercice 2 Soit $a \in]0, +\infty[$. À l'aide de l'encadrement $E(x) \leq x < E(x) + 1$ valable pour tout réel x , calculer les limites de $\frac{E(ax)}{x}$ en 0^+ , 0^- , $+\infty$ et $-\infty$.

Application. — Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(10^n \pi)}{10^n}$.

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, étudier l'existence en $-\infty$ et $+\infty$ de branches paraboliques ou d'asymptotes, et, le cas échéant, étudier la position de la courbe représentative par rapport à son asymptote.

- a) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 2}$ b) $f(x) = \operatorname{sh}(x) - 3x$ c) $f(x) = 2x + 1 + \ln(|x|)$
d) $f(x) = \operatorname{ch}(x)e^{-x}$ e) $f(x) = 2x + 1 + e^{-3x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \sin(x)$.

- Déterminer des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ et la suite $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers 0.
- Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1} - x$.

On pourra utiliser tout au long de l'exercice la relation $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de f .
- Étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Exercice 7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{|x| - 1}$.

- Donner l'ensemble de définition de f et justifier la continuité de f sur celui-ci.
- Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
- La fonction f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner sous une forme simple (sans fraction) la fonction qui la prolonge.
- Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = E(2x) + [x - E(x)]^2$ où E désigne la fonction partie entière.

- Déterminer l'ensemble des points de continuité de f .
- Trouver une relation entre $f(x + 1)$ et $f(x)$, puis tracer le graphe de f sur $[-1, 2]$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$.

- On suppose dans cette question que l'application h est bornée au voisinage de $+\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$ que l'on déterminera.
- Donner un exemple d'application f telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ mais telle que h ne soit pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 2\sqrt{2x} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera. Déterminer sa réciproque et donner l'allure des graphes de f et f^{-1} .

Exercice 11 On définit les applications $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ selon

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2], \\ (x - 2)^2 + 1 & \text{si } x \in [2, 3], \end{cases}$$

$$g_1(y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y \in [0, 1], \\ \sqrt{y-1} + 2 & \text{si } y \in]1, 2], \end{cases} \quad \text{et} \quad g_2(y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y \in [0, 1[, \\ \sqrt{y-1} + 2 & \text{si } y \in [1, 2]. \end{cases}$$

- Tracer les graphes des applications f , g_1 et g_2 .
- Étudier la continuité de f , g_1 et g_2 .
- Étudier l'injectivité de f , g_1 et g_2 . Déterminer les ensembles images $f([0, 3])$, $g_1([0, 2])$ et $g_2([0, 2])$.
- Déterminer les composées $f \circ g_1$, $f \circ g_2$, $g_1 \circ f$ et $g_2 \circ f$ et tracer leur graphe. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 12 Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer si l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre au voisinage de 0 ou $+\infty$, ou si les fonctions sont équivalentes, ou si l'on n'est dans aucun de ces cas.

- a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(x)$ b) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \ln(x)$
c) $f(x) = x^5 + 4x + 1$, $g(x) = e^x[\ln(x)]^3$ d) $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = e^{-2x}$
e) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $g(x) = \ln(x^3 + 1)$ f) $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x[\ln(x)]^3$
g) $f(x) = 2 + e^x \sin(x)$, $g(x) = 1 + e^x \cos(x)$ h) $f(x) = 2e^x + \sin(x)$, $g(x) = e^x + \cos(x)$

Exercice 13 Déterminer les limites suivantes à l'aide d'équivalents :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\operatorname{ch}(x) - 1] \operatorname{sh}(x)}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \ln(1 + x^2)}{\operatorname{sh}(x)(e^x - 1)^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\frac{2x}{\pi})}{\cos(x)}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[\cos(ax)]}{\ln[\cos(bx)]}$ $a, b \in \mathbb{R}^*$ étant fixés e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ $a \in \mathbb{R}$ étant fixé
f) $\lim_{x \rightarrow 1} (2^x + 3^x - 4)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{1/x} + 3^{1/x} + 5^{1/x}}{3}\right)^x$

Exercice 14

1. Déterminer des équivalents au voisinage de 0 de la forme Ax^n ($A \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$) pour les fonctions définies par

a) $f(x) = \operatorname{sh} x + a \operatorname{th} x$, $a \in \mathbb{R}$ étant fixé; b) $f(x) = \frac{\tan[x^2(e^x - 1)]}{\sqrt{\ln(x+1) + 1} - 1}$.

2. Déterminer des équivalents au voisinage de $1/2$ de la forme $A(x - \frac{1}{2})^n$ ($A \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}$) pour les fonctions définies par

a) $f(x) = (2x^2 - 3x + 1) \tan^2(\pi x)$; b) $f(x) = \frac{\sin(\pi x) - \sqrt{\cos[\pi(2x - 1)]}}{\cos(\pi x)}$.

3. Déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$ de la forme Ax^α ($A \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$) pour les fonctions définies par

a) $f(x) = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} - dx\sqrt{x+2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ étant fixés;
b) $f(x) = \frac{e^x + x^{1789} - x^{1515} \ln x}{x^{1957} + (\sqrt{x^2 + 1} - x) \operatorname{ch} x}$.

4. Déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$ de la forme $Ae^{\alpha x}$ ($A \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$) pour les fonctions définies par

a) $f(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x$; b) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(ax) + \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(bx)}$, $a, b \in]0, +\infty[$ étant fixés.

Exercice 15 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, μ un entier non nul, et soit α une racine de P d'ordre de multiplicité μ .

Donner un équivalent simple de P au voisinage de α , puis en déduire que P change de signe en α si et seulement si μ est impair.

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.

- Dresser le tableau de variations de f .
- Donner un équivalent simple de f en 0.
- Montrer qu'en $+\infty$, on a $f(x) \sim ax^n$ où a est un réel et n un entier à déterminer.
- Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax^n)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
- Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 17

1. Préliminaire :

(a) Donner les équivalents les plus simples possibles de $\tan(u)$ au voisinage de 0 et de $\tan(u) - 1$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

(b) On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} \frac{x}{|x| + 1}\right)$.

Donner l'ensemble de définition de φ . Étudier la parité de φ .

Donner des équivalents simples de $\varphi(x)$ en 0 et de $\varphi(x) - 1$ en $+\infty$.

2. Soit n un entier. On définit l'application $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^n}{(x^2 + 1)\varphi(x)}.$$

(a) Étudier selon les valeurs de n la parité de f .

(b) Donner des équivalents simples de f au voisinage de 0 et $+\infty$.

(c) Pour quelles valeurs de n la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?

(d) Pour quelles valeurs de n la courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Pour ces valeurs de n , préciser l'équation de l'asymptote correspondante. Que peut-on dire de la courbe au voisinage de $-\infty$?

3. Reprendre l'exercice avec l'application $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x^n}{(x^2 + 1)\varphi(|x|)}.$$

On pourra écrire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 18 Soit a et b des réels tels que $a > b$. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^4 + 4ax^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 4bx^3 + 1}$.

1. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ de la forme Ax ($A \in \mathbb{R}^*$).

2. En utilisant les formules

$$\sqrt{x^4 + 4cx^3 + 1} - (x^2 + 2cx) = \frac{1 - 4c^2x^2}{\sqrt{x^4 + 4cx^3 + 1} + (x^2 + 2cx)} \quad \text{pour } c \in \{a, b\}$$

calculer la limite B de $f(x) - Ax$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3. En utilisant les formules

$$\sqrt{x^4 + 4cx^3 + 1} - (x^2 + 2cx - 2c^2) = \frac{8c^3x + (1 - 4c^4)}{\sqrt{x^4 + 4cx^3 + 1} + (x^2 + 2cx - 2c^2)} \quad \text{pour } c \in \{a, b\}$$

trouver un équivalent de $f(x) - (Ax + B)$ au voisinage de $+\infty$ de la forme C/x ($C \in \mathbb{R}^*$).

4. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.