INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Limites, continuité

Exercice 1 On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$. Préciser pour chacune d'elle si elle est majorée, minorée, bornée. Déterminer, lorsqu'ils existent, leur maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure (on ne demande pas de justification) :

$$\mathbb{N};\ \mathbb{Q}\cap[0,1[;\ \{x\in\mathbb{Q}^+ : 1\leqslant x^2\leqslant 2\};\ \left\{\frac{1}{n}+(-1)^n, n\in\mathbb{N}^*\right\};\ \left\{\frac{E(10^n\pi)}{10^n}, n\in\mathbb{N}\right\};$$
$$\left\{\frac{1}{x^2+1}, x\in[0,1[\right\};\ \{4\cos^2 x+1, x\in\mathbb{R}\};\ \{e^{-4x}+3, x\in\mathbb{R}\};\ \left\{x+\frac{1}{x}, x\in]0,+\infty[\right\}.$$

Exercice 2 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose B majorée.

1. Montrer que si $A\subset B$, alors $\sup(A)\leqslant\sup(B)$.
2. Application. — Soit $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ une application majorée et $g:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie par $g(t)=\sup\limits_{s\in[0,t]} f(s)=\sup f([0,t])$.
   (a) Montrer que g est croissante.
   (b) On choisit $f(t)=\cos\left(2t-\frac{2\pi}{3}\right)-2\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$. Étudier les variations de f sur $[0,2\pi]$. On pourra s'aider de la fonction définie par $\varphi(t)=\cos(2t)-2\cos(t)$.
   (c) Simplifier $g(t)$ dans ce cas puis tracer le graphe de g sur $[0,4\pi]$.

Exercice 3 On considère une application croissante $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ et l'on pose $A=\{x\in[0,1] : f(x)\leqslant x\}$.

1. Montrer que $A\neq\varnothing$. Montrer que A admet une borne inférieure α et que $\alpha\in[0,1]$.
2. Montrer que pour tout $x\in A$, on a $f(x)\in A$.
3. Montrer que $f(\alpha)$ est un minorant de A puis en déduire que $\alpha\in A$.
4. Déduire alors de la question 2 que $f(\alpha)=\alpha$, i.e. que α est un *point fixe* de f.

Exercice 4 On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{3^x}}{3^{2^x}}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-\ln^2(x)}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-\sqrt{\ln(x)}}$;
e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-(\ln x)^3}{\mathrm{ch}^2 x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin[x^2(1-\cos x)]}{(1-\cos x)^2}$.

Exercice 5 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 6 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x\sin(x)$.

1. Déterminer des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ et la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 7 On considère l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\arcsin(\sin(x))$.

1. Étudier la parité de f. Montrer que f est périodique et déterminer une période.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Simplifier $f(x)$ pour $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ et pour $x\in[\pi/2,3\pi/2]$.
4. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi/2,5\pi/2]$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{|x|-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et justifier la continuité de f sur celui-ci.
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner sous une forme simple (sans fraction) la fonction qui la prolonge.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 9 On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}-x$.

On pourra utiliser tout au long de l'exercice la relation $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de f.
4. Étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

Exercice 10 Soient a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ une application continue. Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[a,b]$, i.e. il existe un $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$. On pourra introduire l'application g définie par $g(x)=f(x)-x$.
2. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue.
   (a) Montrer qu'il existe $x\in[a,\frac{a+b}{2}]$ tel que $f(x+\frac{b-a}{2})=f(x)+\frac{f(b)-f(a)}{2}$. On pourra introduire l'application $g:[a,\frac{a+b}{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par la relation $g(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{2}$.
   Application. — Un véhicule parcourt une distance de D km en un temps de T minutes. Il existe alors un laps de temps de $T/2$ minutes durant lequel il parcourt la distance $D/2$ km.
   (b) Cas particulier : on suppose que $f(a)=f(b)$. Alors il existe un $x\in[a,\frac{a+b}{2}]$ tel que $f(x)=f(x+\frac{b-a}{2})$.
   Application. — À chaque instant, il existe deux points diamétralement opposés de l'équateur en lesquels la température est identique...
3. Soit $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications continues telles que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)<g(x)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)+\varepsilon<g(x)$. Le résultat est-t-il encore valable si on remplace $[a,b]$ par un intervalle ouvert ? non borné ?

Pour les insatiables...

Exercice 11 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2\sqrt{2x} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera. Déterminer sa réciproque et donner l'allure des graphes de f et f^{-1}.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = E(2x) + [x - E(x)]^2$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Déterminer l'ensemble des points de continuité de f.
2. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$, puis tracer le graphe de f sur $[-1, 2]$.

Exercice 13 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. En posant (après justification) $t = \arccos(\sqrt{x})$, simplifier l'expression de $f(x)$.

Exercice 14 Soit $a \in]0, +\infty[$. À l'aide de l'encadrement $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$ valable pour tout réel x, calculer les limites de $\dfrac{E(ax)}{x}$ en 0^+, 0^-, $+\infty$ et $-\infty$.

Application. — Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(10^n\pi)}{10^n}$.

Exercice 15

1. Calculer la limite double $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty} |\cos(n!\pi x)|^m\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On distinguera les cas $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$.
2. On définit ainsi une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe aucun point de $\mathbb{R}$ où f est continue.

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}^*, \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}^*. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des points de continuité de f.

Exercice 17 On définit les applications $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ selon

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1], \\ 1 & \text{si } x \in [1,2], \\ (x-2)^2 + 1 & \text{si } x \in [2,3], \end{cases}$$

$$g_1(y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y \in [0,1], \\ \sqrt{y-1} + 2 & \text{si } y \in]1,2], \end{cases} \quad \text{et} \quad g_2(y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y \in [0,1[, \\ \sqrt{y-1} + 2 & \text{si } y \in [1,2]. \end{cases}$$

1. Tracer les graphes des applications f, g_1 et g_2.
2. Étudier la continuité de f, g_1 et g_2.
3. Étudier l'injectivité de f, g_1 et g_2. Déterminer les ensembles images $f([0,3])$, $g_1([0,2])$ et $g_2([0,2])$.
4. Déterminer les composées $f \circ g_1$, $f \circ g_2$, $g_1 \circ f$ et $g_2 \circ f$ et tracer leur graphe. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 18 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - (1-x)^3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $f_{n-1}(\alpha_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$, puis montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel qui n'est pas le carré d'un rationnel. On considère l'application $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ définie par $f(x) = \dfrac{x(x^2+3n)}{3x^2+n}$.

1. Calculer $f(x) - x$ et $f(x)^2 - n$.
2. Montrer les implications suivantes : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < n \Longrightarrow x^2 < f(x)^2 < n, \\ \forall x \in \mathbb{Q}^+, x^2 > n \Longrightarrow x^2 > f(x)^2 > n. \end{cases}$
3. En déduire que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < n\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}^+$ (indication : supposer que A admette une borne supérieure α et examiner les possibilités $\alpha \in A$ et $\alpha \notin A$).

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction linéaire par morceaux sur tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $\mathbb{R}\backslash[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.
2. En utilisant l'encadrement $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$, montrer que f est continue en 0.
3. Déterminer alors l'ensemble des points de continuité de f.
4. Tracer avec précision le graphe de f.