INSA 1er cycle

Logique

Exercice 1 Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrer que
   a) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C)$; b) $(A\backslash B)\cap(C\backslash D) = (A\cap C)\backslash(B\cup D)$.
2. Simplifier les écritures suivantes :
   a) $[A\cup(A\cap B)]\cap B$; b) $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$; c) $(\overline{A\cup B})\cap(C\cup\overline{A})$.

Exercice 2 Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On pose $A\,\Delta\,B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

1. Montrer que $A\,\Delta\,B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
2. Simplifier $(A\,\Delta\,B)\cup(A\,\Delta\,\overline{B})$.
3. L'opération Δ est-elle commutative sur $\mathcal{P}(E)$?
4. Calculer $A\,\Delta\,\emptyset$, $A\,\Delta\,A$, $A\,\Delta\,B$ lorsque $A\subset B$.

Exercice 3 Le connecteur logique « ou exclusif » noté $\veebar$ est défini de la manière suivante : l'assertion $p\veebar q$ est vraie si et seulement si les propositions p et q ne sont ni simultanément vraies ni simultanément fausses.

1. Dresser la table de vérité du connecteur $\veebar$. Comparer ce connecteur à l'équivalence logique.
2. A quelle opération ensembliste ce connecteur correspond-il ?
3. L'équivalence logique $[p\veebar(q\wedge r)]\iff[(p\veebar q)\wedge(p\veebar r)]$ est-elle vraie ?

Exercice 4 Soit E un ensemble. Pour tout sous-ensemble A de E, on définit sa fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ par $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x\in A \\ 0 \text{ si } x\notin A \end{cases}$. Montrer que

a) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1-\mathbb{1}_A$; b) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$; c) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B}$;
d) $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B|$.

Exercice 5 Écrire la négation des phrases suivantes :

a) chaque jour du mois de septembre, Albert va à la piscine ou en cours de mathématiques ;
b) si le soleil brille, alors il va à la plage ;
c) il est heureux lorsqu'il fait des mathématiques ;
d) il est heureux seulement lorsqu'il fait des mathématiques.

Exercice 6 Traduire en langage clair les assertions suivantes, étudier leur vérité puis écrire leur négation :

a) $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x\geqslant y$;
b) $\forall x\in\mathbb{R},\ (x=3)\Longrightarrow(x^2=9)$;
c) $\forall x\in\mathbb{R},\ (x^2=9)\Longrightarrow(x=3)$.

Exercice 7

1. Montrer l'équivalence suivante :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, (|x|\leqslant y\iff -y\leqslant x\leqslant y).$$
2. En utilisant le raisonnement par l'absurde, prouver que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.
3. Prouver par contraposée que, x étant un réel, $(\forall\varepsilon>0, x<\varepsilon)\Longrightarrow x\leqslant 0$. En déduire que $\bigcap_{\varepsilon>0}]-\infty,\varepsilon[=]-\infty,0]$. Déterminer l'ensemble $\bigcup_{\varepsilon>0}[\varepsilon,+\infty[$.
4. Établir par récurrence les inégalités suivantes :
   a) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}^+, (1+x)^n\geqslant 1+nx$; b) $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}, n\leqslant 2^n\leqslant n!$.

Exercice 8 On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$. Montrer que l'on a
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Exercice 9 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Pour tout sous-ensemble X de E et tout sous-ensemble Y de F, on définit $f(X)=\{f(x), x\in X\}$ et $f^{-1}(Y)=\{x\in E : f(x)\in Y\}$.

1. On considère deux sous-ensembles B_1 et B_2 de F. Montrer les égalités
   (a) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$;
   (b) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$;
   (c) $\overline{f^{-1}(B_1)}=f^{-1}(\overline{B_1})$.
2. On considère deux sous-ensembles A_1 et A_2 de E.
   (a) Montrer l'égalité $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$.
   (b) Comparer $f(A_1\cap A_2)$ et $f(A_1)\cap f(A_2)$.
3. (a) Prouver l'assertion $\forall A\in\mathcal{P}(E), A\subset f^{-1}(f(A))$. Montrer que si f est injective, alors $\forall A\in\mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A))=A$.
   (b) Prouver l'assertion $\forall B\in\mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B))\subset B$. Montrer que si f est surjective, alors $\forall B\in\mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B))=B$.
4. Exemple. — Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$
   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe.
   (b) Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{\frac{1}{\sqrt{3}}\})$, $f^{-1}(f([-\frac{1}{2},0]))$, $f(f^{-1}([1,2]))$.
   (c) Trouver les deux intervalles maximaux sur lesquels f induit une bijection. On déterminera les bijections réciproques.