

Primitives, intégrale de Riemann

Exercice 1 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer une primitive.

1. Fonctions élémentaires :

a) $f(x) = (x^3 + 1)e^{-x}$ b) $f(x) = x^4 \ln|x|$ c) $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$

d) $f(x) = \cos^5 x \sin^4 x$ e) $f(x) = \sin x \operatorname{sh} x$ f) $f(x) = (\arcsin x)^2$

2. Fonctions rationnelles :

a) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}$ b) $f(x) = \frac{x^8 + 1}{x^3(x+1)^4}$

c) $f(x) = \frac{7}{(x+1)^7 - x^7 - 1}$ d) $f(x) = \frac{2x^5 + 1}{(x^2 + 1)^3}$

3. Fonctions rationnelles trigonométriques et hyperboliques :

a) $f(x) = \frac{\tan x}{\sin(3x) + 1}$ b) $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

c) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(2x)}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4}$ d) $f(x) = \frac{\operatorname{ch}(\frac{x}{3}) - 1}{\operatorname{sh}(\frac{x}{2})}$

4. Fonctions irrationnelles :

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^{10} + 1}}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

c) $f(x) = x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ d) $f(x) = \frac{x}{(x^2 + x + 2)^{3/2}}$

e) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ avec $a < b$

Exercice 2 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t}) dt.$$

- Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- Exprimer $f(x + \pi)$ et $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire un intervalle d'étude pour f .
- Montrer que l'application f est continue, puis dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- En déduire une expression simple de f .
- Retrouver directement le résultat précédent en intégrant par parties l'expression initiale de $f(x)$.

Exercice 3 Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_a^b \varphi(x+t) \cos t dt.$$

- En effectuant le changement de variable $y = x + t$ avec x fixé, montrer que l'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
- On suppose maintenant que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $f'(x) = \int_a^b \varphi'(x+t) \cos t dt$.

Exercice 4 On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt.$$

- Vérifier que la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
- En effectuant le changement de variable $y = x + t$ avec x fixé, montrer que l'application f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- (a) Montrer l'inégalité $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e}{x}$. En déduire la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (b) En écrivant $\frac{1}{t+x} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{-1}$ et en cherchant un développement limité de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, montrer plus précisément que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}$.
- (a) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$.
 (b) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t+x}$ puis montrer que $f(x) + \ln x = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t+x} dt + \ln(x+1)$.
 (c) Justifier l'existence d'une constante positive A telle que $\forall t \in]0, 1], \forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \frac{e^t - 1}{t} - \frac{e^t - 1}{t+x} \leq \frac{A}{t+x}$ et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t+x} dt$.
 (d) Donner enfin la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + \ln x]$ puis celle de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Exercice 5 En utilisant des sommes de Riemann, déterminer la limite de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous :

a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2 + k^2}$ b) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{n^3 + k^3}}$ c) $u_n = \frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^{1/n}$