INSA 1er cycle

Analyse

Séries entières

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence ainsi que le domaine de convergence de la série entière $(\sum a_n z^n)$ où a_n est donné par :

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $a_n = \dfrac{1}{n\,2^n}$ c) $a_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ e) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}$ f) $a_n = \dfrac{n^\alpha}{a^n}$ avec $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

g) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ h) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

Exercice 2 Déterminer le rayon de convergence ainsi que le domaine de convergence D de la série entière $(\sum a_n z^n)$, puis calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in D$ où a_n est donné par :

a) $a_n = \begin{cases} (1+i\sqrt{3})^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ b) $a_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

c) $a_n = \dfrac{1}{(n-1)(n+2)}$, $n \geqslant 2$ d) $a_n = \operatorname{ch}(na)$

e) $a_n = \dfrac{an^2+bn+c}{n!}$ f) a_n est la n^{e} décimale de π (on ne calculera la somme que pour $z = \dfrac{1}{10}$)

Exercice 3 Déterminer les rayons de convergence des séries entières $(\sum a_n z^n)$, $(\sum b_n z^n)$ et de leur somme $(\sum c_n z^n)$ lorsque a_n et b_n sont donnés par :

a) $a_n = (-5)^n$ et $b_n = \dfrac{1}{3^n}$;

b) $a_n = -n$ et $b_n = \ln n$;

c) $a_n = 2^n$ et $b_n = in - 2^n$.

Exercice 4 Déterminer les rayons de convergence des séries entières $(\sum a_n z^n)$, $(\sum b_n z^n)$ et de leur série-produit $(\sum c_n z^n)$ (dont on précisera c_n), puis calculer leur somme, lorsque a_n et b_n sont donnés par :

a) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ et $b_n = \dfrac{1}{2^n}$;

b) $a_n = 2^n - 2$ et $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 3^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \,; \end{cases}$

c) $a_n = 2 \times 3^n - 2^n$ et $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ -2 & \text{si } n \geqslant 1 \,; \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0, \\ 1 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$

Exercice 5

1. Développer en série entière la fonction $x \longmapsto \cos x \operatorname{ch} x$; on pourra utiliser $\operatorname{ch} x = \cos(ix)$ ainsi qu'une formule de transformation trigonométrique.
2. Développer en série entière la fonction $x \longmapsto \ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé ; on pourra décomposer en éléments simples la dérivée de cette fonction.
3. (a) En utilisant le produit de deux séries, développer en série entière les fonctions $x \longmapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$ et $x \longmapsto [\ln(1-x)]^2$.

   (b) Montrer que les rayons de convergence des séries entières obtenues ne peuvent excéder 1.

   (c) Comparer les deux séries en question.

Exercice 6

1. Calculer l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - x\cos\theta}$ pour tout $x \in]0,1[$ à l'aide du changement de variable $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.
2. Développer en série entière les fonctions f et $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x\cos\theta}$. On déterminera leur rayon de convergence.
3. En déduire la valeur de $a_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n\theta\,d\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

1. Rechercher une solution développable en série entière de l'équation différentielle $x\,y''(x)+2\,y'(x)+\omega^2 x\,y(x)=0$ où ω est une constante fixée.
2. Exprimer la solution ainsi trouvée à l'aide de fonctions usuelles puis déterminer la solution générale de l'équation différentielle.

Exercice 8 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1-x^2)\,y''(x)-x\,y'(x)+4\,y(x)=0.$$

1. Rechercher une solution de l'équation (E) développable en série entière $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On établira une relation de récurrence entre a_n et a_{n+2}, puis on calculera a_{2p} en fonction de a_0 et a_{2p+1} en fonction de a_1.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.
3. On pose $z(t)=y(\cos t)$, $t\in]0,\pi[$. Montrer que la fonction z satisfait à l'équation différentielle

$$(E') \qquad z''(t)+4\,z(t)=0.$$

4. Résoudre (E') puis en déduire la solution générale de (E) sur $]-1,1[$.

Exercice 9 (Longueur d'une ellipse)

1. Développer en série entière la fonction $x\longmapsto\sqrt{1-x}$. Déterminer le rayon de convergence de cette série puis examiner les cas particuliers $x=1$ et $x=-1$.
2. On considère l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé avec $a\geqslant b>0$. On pose $c=\sqrt{a^2+b^2}$ et $e=\dfrac{c}{a}$. Montrer que la longueur de cette ellipse est donnée par l'intégrale

$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt.$$

On rappelle que la longueur d'un arc paramétré $t\in[t_1,t_2]\longmapsto(x(t),y(t))$ vaut $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$.

3. (a) Développer la fonction $t\longmapsto\sqrt{1-e^2\cos^2 t}$ en série entière par rapport à la variable $\cos^2 t$.
   (b) Montrer que la série de fonctions de la variable t ainsi obtenue est uniformément convergente sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
   (c) En déduire une expression de L sous forme de série.

Exercice 10 (Fonctions de Bessel)

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$J_n(x)=\frac{2^n\,n!}{(2n)!\,\pi}\,x^n\int_0^{\pi}\cos(x\,\sin\theta)\,\cos^{2n}\theta\,d\theta.$$

1. Développer en série entière la fonction $x\longmapsto\cos(x\,\sin\theta)$.
2. Montrer que la série de fonctions de la variable θ ainsi obtenue (x étant maintenant fixé) est uniformément convergente sur $[0,\pi]$.
3. On pose $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^p\theta\,\sin^q\theta\,d\theta$ pour $p,q\in\mathbb{N}$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, prouver la relation $I_{p,q}=\dfrac{p-1}{p+q}\,I_{p-2,q}$ valable pour $p\geqslant 2$.
   (b) En déduire $I_{2p,q}$ en fonction de $I_{0,q}$ et $I_{2p+1,q}$ en fonction de $I_{1,q}$. Que vaut $I_{1,q}$?
4. On donne $I_{0,2n}=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^{2n}\theta\,d\theta=\frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n}\,n!^2}$ (*intégrale de Wallis*). Déduire des questions précédentes le développement en série entière de la fontion J_n. Déterminer son rayon de convergence.
5. À l'aide du développement trouvé, calculer J_n' et J_n'', puis vérifier que J_n satisfait à l'équation différentielle (*équation de Bessel*)

$$x^2\,y''(x)+x\,y'(x)+(x^2-n^2)\,y(x)=0.$$

6. (a) Montrer que le développement en série entière de la fontion J_n^2 s'écrit

$$J_n^2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2n+2k)!}{k!\,(2n+k)!\,[(n+k)!]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k}.$$

   (b) En déduire alors la relation

$$J_n^2(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}J_{2n}(2x\sin\theta)\,d\theta.$$