INSA 1^{er} cycle

Analyse

Séries de fonctions

Exercice 1

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions $(\sum f_n)$ de terme général donné par $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n+1}$.
2. On introduit le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sup_{x\in]1,+\infty[} R_n(x) \geqslant \frac{1}{2}$.
   (b) La série de fonctions $(\sum f_n)$ est-elle uniformément convergente sur $[a,+\infty[$ pour $a>1$? sur $]1,+\infty[$?

Exercice 2 On considère la série de fonctions $(\sum f_n)$ sur $\mathbb{R}$ de terme général donné par $f_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n^2}$, $n \geqslant 1$.

1. Montrer que la série $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série des dérivées $(\sum f_n')$ est uniformément convergente sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$, pour tout $\alpha \in]0,\pi[$.
3. Montrer que la série des dérivées secondes $(\sum f_n'')$ est divergente. Cependant la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 3 On pose $f_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. La série de fonctions $(\sum f_n)$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?
2. On introduit le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.
   (a) Calculer $R_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, et donc que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est uniformément convergente sur ces mêmes ensembles.
3. Soit $g_n = (-1)^n f_n$. Montrer que la série de fonctions $(\sum g_n)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. On considère la série de fonctions $(\sum f_n)$ sur $\mathbb{R}$ de terme général donné par $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}$.
   (a) Montrer que la série $(\sum f_n')$ est uniformément convergente sur $[-a,a]$ pour tout $a\in[0,2[$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ pour tout $x\in]-2,2[$.
   (c) En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x\in]-2,2[$. Donner la valeur numérique de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$.
   (d) Montrer que la série $(\sum f_n)$ est uniformément convergente sur $[-2,0]$. Donner la valeur numérique de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.
2. On considère la série de fonctions $(\sum g_n)$ sur $\mathbb{R}$ de terme général donné par $g_n(t) = \dfrac{\cos[(n+1)t]}{(n+1)2^n}$.
   (a) Déterminer le domaine D de convergence simple de la série de fonctions $(\sum g_n)$. On pose $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$ pour tout $t\in D$.
   (b) La série de fonctions $(\sum g_n)$ est-elle uniformément convergente sur D ? La fonction S est-elle continue sur D ?
   (c) A-t-on $S'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g_n'(t)$ pour tout $t\in D$?

Exercice 5 Le but de cet exercice est de prouver l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x}\,dx.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale ainsi que celle de la série.
2. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à e^y en posant $y=-x\ln x$, montrer l'inégalité
$$\left|\int_0^1 x^{-x}\,dx - \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^k}{k!}\,dx\right| \leqslant e^{1/e}\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}\,dx.$$
3. On pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^k\,dx$.
   (a) Exprimer $I_{n,k}$ en fonction de $I_{n,k-1}$.
   (b) Calculer $I_{n,0}$, puis obtenir $I_{n,n}$.
   (c) En déduire l'égalité annoncée.