INSA 1er cycle

Analyse

Séries numériques

Exercice 1 Étudier la convergence des séries numériques $(\sum u_n)$ de terme général donné par :

a) $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n+1}$ b) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ c) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$

d) $u_n = \ln n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ e) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ f) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

g) $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{sinon} \end{cases}$ h) $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est une puissance de 2} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{sinon} \end{cases}$

i) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ j) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Exercice 2 Montrer la convergence des séries $(\sum u_n)$ suivantes puis calculer leur somme $\displaystyle\sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} u_n$:

a) $u_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (décomposer en éléments simples)

c) $u_n = \dfrac{an^2+bn+c}{n!}$ d) $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$

e) $u_n = \dfrac{1}{1.2^n} + \dfrac{1}{1!.2^{n-1}} + \cdots + \dfrac{1}{k!.2^{n-k}} + \cdots + \dfrac{1}{n!.1}$

Exercice 3

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ est convergente (on pourra introduire ε_n tel que $\sqrt{n^2+1} = n+\varepsilon_n$). Cette série est-elle absolument convergente ?
2. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Montrer que la somme partielle des 1570 (resp. 1571) premiers termes approche S à 0,001 près par excès (resp. par défaut).
3. La série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+n})$ est-elle convergente ?

Exercice 4 Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$; pour cela, on majorera $x^n\sin(\pi x)$ par une expression plus facile à intégrer.
2. Écrire une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}.
3. Déduire des deux questions précédentes un équivalent pour u_n de la forme $\dfrac{A}{n^\alpha}$ où A et α sont deux réels que l'on déterminera. En déduire la convergence de la série $(\sum u_n)$.
4. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Exprimer S_n par une intégrale.
   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin \pi x}{1-x}$ est bornée sur $[0,1[$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+1}\frac{\sin\pi x}{1-x}\,dx = 0$, puis que la somme de la série $(\sum u_n)$ est donnée par
   $$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Exercice 5 On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante. Donner une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
2. En déduire pour u_n une expression de la forme $u_n = \dfrac{n!}{e}(e-w_n)$, w_n étant le terme général d'une suite à expliciter (on pourra introduire $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$).
3. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{e(n+1)} < u_n < \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la nature des séries $(\sum u_n)$, $(\sum \frac{u_n}{n})$, $(\sum (-1)^n u_n)$.

Exercice 6 On rappelle que $\dfrac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \dfrac{(-x)^{n+1}}{1+x}$.

1. Écrire un développement de Taylor de $\arctan x$. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. (a) Écrire un développement de Taylor de $\ln(1+x)$. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

(b) Calculer la somme de la série obtenue en prenant dans la série précédente un terme positif suivi de deux termes négatifs, dans l'ordre dans lequel ils se présentent :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Exercice 7 (Série hypergéométrique)

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \times \frac{x^n}{n!}.$$

On distinguera les cas $|x| < 1$, $|x| > 1$, $|x| = 1$. Pour le cas $|x| = 1$, on effectuera un développement limité de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2 et on appliquera la règle de Gauss.

Exercice 8 (Constante d'Euler)

On considère la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

et on introduit la série $(\sum u_n)$ de somme partielle γ_n, c'est-à-dire telle que $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \gamma_n$.

1. Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend en décroissant vers une constante $\gamma \in [0, 1]$ (constante d'Euler, $\gamma = 0,577215\dots$).
2. Donner pour u_n un équivalent de la forme $\frac{A}{n^\alpha}$ où A et α sont deux réels que l'on déterminera.
3. En comparant série et intégrale pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^a}$, $a > 1$, montrer que le reste de la série $(\sum \frac{1}{n^a})$ est équivalent à $\frac{1}{a-1}\frac{1}{n^{a-1}}$.
4. Déduire de ce qui précède que $\gamma = \gamma_n - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
5. On pose
$$\gamma'_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \ln n$$
et on introduit la série $(\sum u'_n)$ de somme partielle γ'_n.
Donner pour u'_n un équivalent de la forme $\frac{B}{n^\beta}$.
6. En utilisant de nouveau la question 3, montrer que le reste de la série $(\sum u'_n)$ est équivalent à $\frac{1}{12n^2}$.
7. On pose
$$\gamma''_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \ln n$$
Comparer les vitesses de convergence des suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\gamma'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\gamma''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 9 (Formule de Stirling)

Le but de cet exercice est de trouver un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.

1. En comparant série et intégrale pour la fonction $x \mapsto \ln x$, montrer que $\ln n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\ln n - 1)$. On ne peut toutefois en déduire que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ car $\ln(n!) - n(\ln n - 1)$ ne tend pas vers 0.
2. On pose $S_n = \ln(n!) - n(\ln n - 1)$ et on introduit la série $(\sum u_n)$ de somme partielle S_n. Donner un développement limité de u_n en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2.
3. Sachant que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$ (voir ex. 8), en déduire qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}.$$
En fait $\lambda = \sqrt{2\pi}$ peut être obtenu par la formule de Wallis : $\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ et l'on a (formule de Stirling)
$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}.}$$