INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Le symbole $\sum$

Notation *Si m et n sont deux entiers tels que $m \leqslant n$ et si a_k est une expression qui dépend de k pour $m \leqslant k \leqslant n$, on note $\sum_{k=m}^{n} a_k$ la somme $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$.*

Par exemple,

$$\sum_{k=m}^{n} k = m + (m+1) + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2},$$

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = r^m + r^{m+1} + \cdots + r^{n-1} + r^n = \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r} = \frac{r^m\left(1 - r^{n-m+1}\right)}{1-r} \quad \text{pour } r \neq 1.$$

En particulier, on rappelle que (à savoir par cœur)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad \text{pour } r \neq 1.}$$

Exercice 1

1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$:
   $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 150^3$; $\quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{29}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ?
   $$\sum_{p=1}^{n} p.n = \sum_{k=1}^{n} k.n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) n = k\left(\sum_{k=1}^{n} n\right).$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :
   a) $\sum_{k=0}^{30} (-1)^k$; b) $\sum_{k=0}^{n} 5$; c) $\sum_{k=10}^{n} (2k-4)$; d) $\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^k}$; e) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{5k-31}}{7^{2k+1}}$;
   f) $\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n}$; g) $\sum_{k=3}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$; h) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} jk$; i) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ (i désigne ici le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$).

Exercice 2

1. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.
2. En déduire une expression simplifiée (sans symbole $\sum$) de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Exercice 3

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Calculer les espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ puis la variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

Moyenne, variance, écart-type

Définition *Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une série de données numériques.*

- *La moyenne de cette série est égale à $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.*
- *La variance de cette série est égale à $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$.*
- *L'écart-type de cette série est égal à $s = \sqrt{s^2}$.*

Exercice 4 Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une série de données. On note $\bar{x}$ sa moyenne et s^2 sa variance. Montrer que

$$s^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2.$$

Exercice 5 On considère une série de n_1 données de moyenne m_1 et une série de n_2 données de moyenne m_2. Calculer la moyenne de la série globale formée de ces deux séries.

Exercice 6 Lors d'un examen, les notes d'un groupe de 10 étudiants sont les suivantes :

$$10,5 \mid 13 \mid 6 \mid 7 \mid 9,5 \mid 18 \mid 15 \mid 5,5 \mid 10 \mid 8$$

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série de notes.
2. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une série de données. On pose pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_i = ax_i + b$. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série de données $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
   (b) On souhaite ramener par une transformation affine la moyenne des notes à 11 et l'écart-type à 3. Comment doit-on choisir a et b ?