INSA 1$^{\text{er}}$ cycle

Analyse

Suites de fonctions

Exercice 1 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ de terme général donné par

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n}\,x.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$? sur $[a,b]$ pour $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$?

Exercice 2 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = n(x^n - x^{n+1}).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $[0,1]$.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$? sur $[0,1[$? sur $[0,\delta]$ pour $\delta\in]0,1[$?

Exercice 3 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2n},\\[2mm] 4n-4n^2x & \text{si} \quad \dfrac{1}{2n}< x\leqslant \dfrac{1}{n},\\[2mm] 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n}< x\leqslant 1.\end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $[0,1]$.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$? sur $]0,1]$? sur $[\varepsilon,1]$ pour $\varepsilon\in]0,1[$?

Exercice 4 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ de terme général donné par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{|x|}{n} & \text{si} \quad |x|\leqslant n,\\ 0 & \text{si} \quad |x|>n.\end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$? sur $[a,b]$ pour $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$?

Exercice 5 On étudie la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2x^2+1}.$$

1. Donner le domaine D de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la fonction limite f.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur D ?
3. Donner le domaine D' de convergence simple de la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la fonction limite g.
4. La suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur D' ? sur toute partie de D' de la forme $]-\infty,-\delta]\cup[\varepsilon,+\infty[$ pour $\delta,\varepsilon>0$?
5. A-t-on $g=f'$ sur D' ?

Exercice 6 On étudie la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^n.$$

1. Donner le domaine D de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la fonction limite f.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur D ? sur $]0,2[$? sur $[a,b]$ pour $a,b\in]0,2[$ avec $a<b$?
3. On pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$. La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$?

Exercice 7 On étudie la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par

$$f_n(x) = n\cos^n x\,\sin x.$$

1. Donner le domaine D de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la fonction limite f.
2. Soit $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Déterminer la limite de la suite numérique $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer $u_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$. La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente vers $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$?
4. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente sur D ?