INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Systèmes linéaires

Exercice 1 Discuter et résoudre les systèmes suivants où a, b, c sont des paramètres :

a) $\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 2az + t = a \\ x + 2y + z + t = 2b \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 3y - 4z = 10 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + z = 15 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

1. Déterminer, suivant les valeurs des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et la parité de n, le nombre de solutions du système linéaire
$$\begin{cases} x_i + x_{i+1} = a_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ x_1 + x_n = a_n. \end{cases}$$
Résoudre ensuite ce système dans les cas $n = 3$ et $n = 4$.
2. Application. — Dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, déterminer
   (a) les triangles ayant pour milieux des côtés les trois points $A(1,0)$, $B(0,0)$ et $C(0,1)$;
   (b) les rayons des trois cercles tangents entre eux centrés en A, B et C ;
   (c) les quadrilatères ayant pour milieux des côtés les quatre points A, B, C et $D(1,1)$. Plus généralement, de quel type doit être le quadrilatère $ABCD$ pour qu'il existe des quadrilatères ayant $ABCD$ pour milieux des côtés ?

Exercice 3 Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x < 1, \\ 4x + b & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \\ 8x + c & \text{si } 2 \leqslant x < 3, \\ 6x + d & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$$

1. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. On exprimera b, c, d en fonction de a.
2. On suppose les conditions précédentes satisfaites. Déterminer alors les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \alpha|x-1| + \beta|x-2| + \gamma|x-3| + \delta x + \varepsilon.$$
Tracer la courbe représentative de f dans le cas où $a = 0$.

Pour les insatiables...

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle carré magique d'ordre n un carré contenant n^2 nombres réels (ou complexes) tel que les sommes de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale coïncident.

Exemples : $\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ \hline\end{array}$ (ordre 3, somme 15), $\begin{array}{|cccc|}\hline 8 & 11 & 14 & 1 \\ 13 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 16 & 9 & 6 \\ 10 & 5 & 4 & 15 \\ \hline\end{array}$ (ordre 4, somme 34).

Déterminer la forme de tous les carrés magiques de type 3×3 : $\begin{array}{|ccc|}\hline a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \hline\end{array}$.

On introduira S la somme commune des lignes, colonnes et diagonales.

Exercice 5

1. Déterminer les réels a, b, c tels que, pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quatre fois dérivable, l'application φ définie par
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - x\left[af(-x) + bf(0) + cf(x)\right]$$
vérifie
$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0.$$
2. Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que, pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ six fois dérivable, l'application φ définie par
$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\int_{-2x}^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t - x\left[af(-2x) + bf(-x) + cf(0) + df(x) + ef(2x)\right]$$
vérifie
$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(5)}(0) = \varphi^{(6)}(0) = 0.$$
On pourra introduire les inconnues auxiliaires $\alpha = a+e$, $\beta = b+d$, $\gamma = a-e$, $\delta = b-d$.