

I Définitions

$E = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ou $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$: espace des états, $X_n: \Omega \rightarrow E$ v.a.

Déf: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chaîne de Markov $\Leftrightarrow \forall n, \forall x_0, \dots, x_n \in E$, loi de $(X_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$
 $=$ loi de $(X_n | X_{n-1} = x_{n-1})$.

$$\begin{aligned} \text{Dans ce cas: } \mathbb{P}(X_n = x) &= \sum_{x_0, \dots, x_{n-1} \in E} \mathbb{P}(X_n = x | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= \sum_{x_0, \dots, x_{n-1} \in E} \mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}) \mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_0 = x_0, \dots, X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &\quad \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &= \sum_{x_0, \dots, x_{n-1} \in E} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \dots \mathbb{P}(X_n = x | X_{n-1} = x_{n-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la loi de X_n est déterminée à l'aide de celle de X_0 (loi absolue) et des lois conditionnelles $(X_i | X_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$ (probabilités de transition)

Note: On supposera toujours les probabilités de transitions $\mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x)$ stationnaires (chaîne homogène) i.e. indépendantes de n .

Notation: $p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = a_j | X_{n-1} = a_i) = \mathbb{P}_{a_i}(X_1 = a_j)$

$$\mathbb{P}(X_n = a_j) = \sum_{a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}} \in E} \mathbb{P}(X_0 = a_{i_0}) p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} j}$$

matrice de transition: $P = (p_{ij})_{a_i, a_j \in E} \rightarrow$ c'est une matrice stochastique: $p_{ij} \geq 0, \sum_{a_j \in E} p_{ij} = 1$.

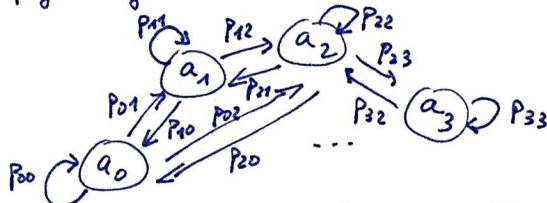
passage de la loi de X_{n-1} à celle de X_n : soit $\pi_j^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = a_j)$, $\pi^{(n)} = (\pi_j^{(n)})_{a_j \in E}$ vecteur - ligne
 $\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P$

passage de la loi de X_0 à celle de X_n : $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$

$$\text{avec } (P^n)_{ij} = \sum_{a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}} \in E} p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} = \mathbb{P}_{a_i}(X_n = a_j) = p_{ij}^{(n)}$$

On posera $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ en accord avec $P^0 = I$.

représentation sagittale



Exemple: marche sur $\mathbb{Z}$: $\dots \rightleftharpoons (-2) \xrightleftharpoons[q]{p} (-1) \xrightleftharpoons[q]{p} 0 \xrightleftharpoons[q]{p} 1 \rightleftharpoons \dots$ $P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$
 $p+q=1$

Equation de Chapman-Kolmogorov: $p_{ij}^{(n)} = \sum_{a_k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$

démonstration: $P^n = P^m P^{n-m}$. $\square$

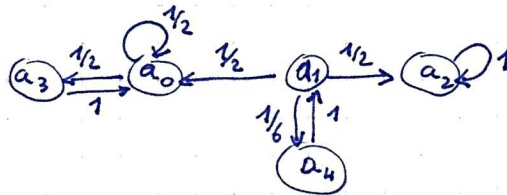
Exemple de chaîne de Markov: $X_{n+1} = \varphi(X_n, U_{n+1})$ où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. i.i.d indépendantes de X_0 .
 X_n est $\sigma(X_0, U_1, \dots, U_n)$ -mesurable.

II Classification des états

1) Absorption : a_i absorbant $\Leftrightarrow \forall a_j \in E \setminus \{a_i\}, p_{ij} = 0 \Leftrightarrow p_{ij} = 1$
 soit $F \subseteq E$. F fermée $\Leftrightarrow \forall a_i \in F, \forall a_j \in E \setminus F, p_{ij} = 0$

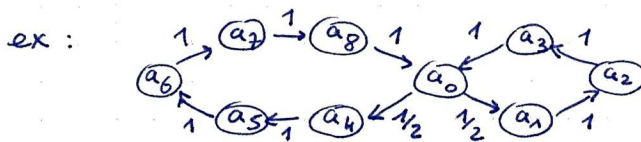
2) Iréductibilité : a_j accessible depuis a_i : $(a_i \rightarrow a_j) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / p_{ij}^{(n)} > 0$;
 a_i et a_j communiquent $(a_i \leftrightarrow a_j) \Leftrightarrow (a_i \rightarrow a_j \text{ et } a_j \rightarrow a_i)$ [ou passe $a_i \leftrightarrow a_j$]
 chaîne irréductible $\Leftrightarrow$ tous les états communiquent.

ex : $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



a_2 : état absorbant, $\{a_0, a_3\}$ classe fermée $\rightarrow$ chaîne réductible.

3) Périodicité : période de a_i : $d(i) = \text{pgcd} \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$;
 si $\forall n \geq 1, p_{ii}^{(n)} = 0$ on pose $d(i) = 0$;
 si $d(i) = 1$, a_i est aperiodique et $\exists N_0 / \forall n \geq N_0, p_{ii}^{(n)} > 0$.



$\forall n$ impair, $p_{00}^{(n)} = 0 \Rightarrow d(i)$ pair ;
 $p_{00}^{(2)} = 0, p_{00}^{(4)} = p_{00}^{(6)} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(i) = 2$.

4) Réurrence : soit $\tau_{a_j} = \min \{n \geq 1 : X_n = a_j\}$ ($= \infty$ si $\emptyset$)

pour $n \geq 1, f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_{a_i} \{\tau_{a_j} = n\} = \mathbb{P}_{a_i} (X_1, \dots, X_{n-1} \neq a_j, X_n = a_j)$ $\rightarrow$ 1^{er} passage par a_j en n si $a_i \neq a_j$
 $f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_{a_i} (\tau_{a_j} < \infty) \rightarrow$ proba que a_j soit visité au moins une fois depuis a_i .
 $\rightarrow$ 1^{er} retour en a_i en n si $a_i = a_j$

Définition : 1) a_i récurrent $\Leftrightarrow f_{ii}^* = 1$ (et alors il y a p.s. une infinité de retours en a_i);
 a_i transitoire $\Leftrightarrow f_{ii}^* < 1$.

2) soit a_i récurrent, $\nu_i = \mathbb{E}_{a_i}(\tau_{a_i}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ (temps moyen de retour);

si $\nu_i < \infty$, a_i récurrent positif;
 si $\nu_i = \infty$, a_i récurrent nul.

Critère de récurrence:

$$a_i \text{ récurrent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Démonstration : On a $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}_{a_i} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = a_i\}} \right) = \mathbb{E}_{a_i} (N_{a_i})$ où N_{a_i} : nombre de passages en a_i

Sous $\mathbb{P}_{a_i}$: N_{a_i} : loi géométrique $\mathcal{G}(1 - f_{ii}^*)$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{a_i}(N_{a_i} \geq n+1) &= \mathbb{P}_{a_i}(N_{a_i} \geq n, \tau_{a_i} \circ \theta_n < \infty) = \mathbb{P}_{a_i}(N_{a_i} \geq n) \underbrace{\mathbb{P}_{a_i}(\tau_{a_i} < \infty)}_{f_{ii}^*} \\ \Rightarrow \mathbb{P}_{a_i}(N_{a_i} \geq n) &= f_{ii}^{*n} \end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases} \text{si } a_i \text{ transitoire, } f_{ii}^* < 1 \Rightarrow \mathbb{E}_{a_i}(N_{a_i}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{f_{ii}^*}{1 - f_{ii}^*} < \infty \\ \text{si } a_i \text{ récurrent, } f_{ii}^* = 1 \Rightarrow N_{a_i} = +\infty \text{ p.s.} \Rightarrow \mathbb{E}_{a_i}(N_{a_i}) = \infty. \square \end{cases}$

Proposition.

Si $a_i \leftrightarrow a_j$ alors a_i et a_j sont de même type (récurrent positif, récurrent nul, transitoire).

Démonstration (indication) : si $\exists m_0, n_0 \geq 1 / P_{ij}^{(m_0)} > 0, P_{ji}^{(n_0)} > 0$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, P_{ij}^{(k+m_0+n_0)} \geq P_{ji}^{(m_0)} P_{ii}^{(k)} P_{ij}^{(n_0)} = C^k P_{ii}^{(n_0)} \text{ et vice-versa (Chap. - Kol.)}$$

$$\Rightarrow \sum_k P_{ii}^{(k)} \text{ et } \sum_k P_{jj}^{(k)} \text{ sont de même nature.}$$

Remarques : • si E est fini et a_i récurrent, alors a_i récurrent positif.
• si E est fini et la chaîne irréductible, alors elle est récurrente.

→ si tous les états étaient transitoires, la chaîne retournerait à l'état fini dès !

Ex : marche sur $\mathbb{Z}$.

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & q & 0 & p & 0 \\ & & q & 0 & p \\ 0 & & & q & 0 & p \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = pJ + qJ^{-1} \text{ avec } p+q=1, (J)_{ij} = \delta_{j,i+1}$$

• $\forall i, i \leftrightarrow i+1 \Rightarrow$ chaîne irréductible.

$\forall n$ impair, $P_{ii}^{(n)} = 0$ et $P_{ii}^{(2)} > 0 \Rightarrow 2$ -périod.

$$P^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} J^{2k-n} \Rightarrow P_{ij}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n+i-j}{2}} & \text{si } j-i \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ex : $i=j=0, n$ pair : $P_{ii}^{(n)} = C_n^{n/2} (pq)^{n/2} \sim \frac{(4pq)^{n/2}}{\sqrt{\pi n/2}} \Rightarrow 0$ récurrent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$
($n/2$ pas à droite)
($n/2$ pas à gauche) $\Leftrightarrow p=q=\frac{1}{2}$

cas général : $P_{ij}^{(n)} = \frac{n!}{(\frac{n+j-i}{2})! (\frac{n+i-j}{2})!} (pq)^{n/2} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-i}{2}} \sim \frac{(4pq)^{n/2}}{\sqrt{\pi n/2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-i}{2}} \rightarrow$ même conclusion.

Décomposition en blocs :

Supposons E fini.

P est semblable (via une permutation) à $P^* = \begin{bmatrix} P_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & P_2 & 0 \\ R_1 & \dots & R_2 & Q \end{bmatrix}$

$P_1, \dots, P_2$ sont les matrices de transition de la chaîne restreinte aux classes fermées irréductibles

Q : matrice sous-stochastique $\rightarrow$ transitions entre états transitoires

$R_1, \dots, R_2$: transitions des états transitoires vers les états récurrents

ex du II-2) : $P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \rightarrow P^* = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & a_3 & a_1 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_2 \\ a_0 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_4 \end{matrix}$

Cas d'une chaîne d -périodique irréductible :

$E = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{d-1}$ avec $C_k = \{a_j \in E : \exists n \in \mathbb{N} / P_{0j}^{(nd+k)} > 0\}$
La chaîne va en 1 pas de la classe C_k vers C_{k+1} , $0 \leq k \leq d-2$
et C_d vers C_0 .

$D_1, \dots, D_d$: matrices de transition entre classes successives.

$$P^* = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{d-1} \\ D_d & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

III Ergodicité

Théorème ergodique :

Soit une chaîne irréductible, récurrente, aperiodique. Alors :

1) Si récurrence positive :

$$\bullet \forall a_i \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{\nu_j}$$

i.e. $P^n \rightarrow \Pi$ matrice stochastique à lignes identiques;

• On a $\Pi^2 = \Pi$ (projection) et $\pi = \pi P$ si $\pi = (\pi_j)_{a_j \in E}$ vecteur ligne π : loi stationnaire.

C'est l'unique probabilité invariante : $\begin{cases} \pi_j > 0, \sum_{a_j \in E} \pi_j = 1 \\ \pi_j = \sum_{a_i \in E} \pi_i \cdot p_{ij} \end{cases}$

• $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ v.a. de loi π

2) Si récurrence nulle : $\forall a_i \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

moralité : la chaîne tend vers un état stationnaire indépendant de la loi initiale.

Indication de la preuve :

a) On introduit $P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n$ et $F_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$.

$$\text{On a } \begin{cases} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \quad (\text{Markov}), n \geq 1 \\ p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{ij} = F_{ij} P_{jj} \text{ si } i \neq j \\ P_{ii} = 1 + F_{ii} P_{ii} \Rightarrow P_{ii} = \frac{1}{1 - F_{ii}} \end{cases}$$

$$\text{récurrence + irréductibilité} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow 1^-} P_{ij}(z) = +\infty \\ F_{ij}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^* = 1 \\ F'_{jj}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = \nu_j \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) P_{ij}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{(1-z) F_{ij}(z)}{1 - F_{jj}(z)} = \frac{F_{ij}(1)}{F'_{jj}(1)} = \frac{1}{\nu_j}$$

$$\text{or } (1-z) P_{ij}(z) = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} [p_{ij}^{(n)} - p_{ij}^{(n-1)}] z^n \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} [p_{ij}^{(n)} - p_{ij}^{(n-1)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

(l'aperiodicité intervient ici ; en fait $(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$)

$$b) \forall n, \sum_{a_j \in E} p_{ij}^{(n)} = 1 \Rightarrow \sum_{a_j \in E} \pi_j = 1 \text{ si } E \text{ fini}$$

$$\text{Chapman-Kolmogorov : } p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{a_k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

$$\text{On fait } m \rightarrow \infty : \pi_j = \sum_{a_k \in E} \pi_k p_{kj}^{(n)} \text{ d'où } \forall n, \pi = \pi P^n, \text{ puis } n \rightarrow \infty : \pi = \pi \Pi \text{ i.e. } \Pi^2 = \Pi$$

Unicité : Soit $x = (x_j)_{a_j \in E}$ un vecteur-proba tel que $x = x P$.

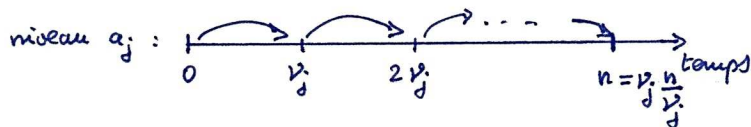
Alors $\forall n, x = x P^n$ donc $n \rightarrow \infty : x = x \Pi = \pi$. $\square$

Complément :

Si la chaîne est irréductible, récurrente et d-periodique, alors $\forall a_i, a_j \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} = \frac{d}{\nu_j} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\nu_j}$$

Interprétation: ν_j = temps de retour moyen en a_j



$$\frac{n}{\nu_j} \approx \text{nombre moyen de retours en } a_j \text{ sur } [0, n]$$

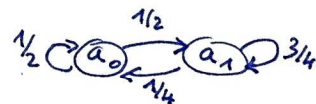
$$\approx E_{a_j} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k = a_j\}} \right) = \sum_{k=1}^n P_{jj}^{(k)}$$

i.e. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{jj}^{(k)} \approx \frac{1}{\nu_j}$

Démonstration: $(1-z^d) P_{ij}(z) = (1-z^d) \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(nd)} z^{nd} \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(nd)}$

et $\lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z^d) P_{ij}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{(1-z^d) F_{ij}(z)}{1 - F_{jj}(z)} = \frac{d F_{ij}(1)}{F'_{jj}(1)} = \frac{d}{\nu_j} \cdot \square$

Exemple: 1) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$



$$P^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{4^n} & 2 - \frac{2}{4^n} \\ 1 - \frac{1}{4^n} & 2 + \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2-périodique: $P^{2n} = I$, $P^{2n+1} = P$

$$\tau_{a_j} = \begin{cases} 1 & \text{P}_{a_i} \text{-p.s. si } a_i \neq a_j \\ 2 & \text{P}_{a_j} \text{-p.s. si } a_i = a_j \end{cases}, \quad \nu_j = E_{a_j}(\tau_{a_j}) = 2.$$

$$\begin{cases} P_{ii}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2} \\ P_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} = \frac{z}{1-z^2} \text{ si } a_i \neq a_j \end{cases} \quad \begin{cases} F_{ii}(z) = z^2 \\ F_{ij}(z) = z \text{ si } a_i \neq a_j \end{cases}$$

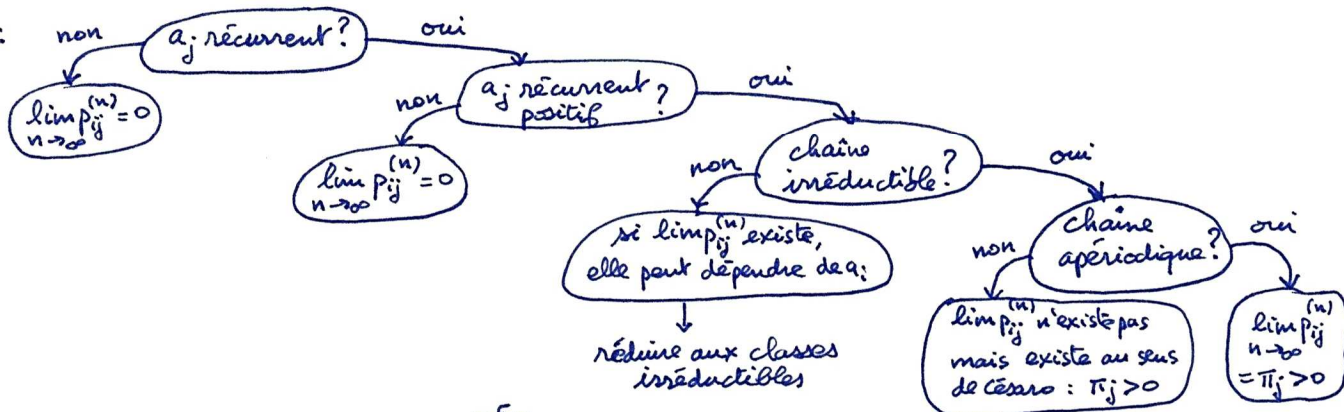
$$\begin{cases} (1-z) P_{ii}(z) = 1-z+z^2-z^3+\dots = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} [P_{ii}^{(n)} - P_{ii}^{(n-1)}]} z^n \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{ii}^{(n)} - P_{ii}^{(n-1)}] = 1-1+1-1+\dots \\ (1-z^2) P_{ii}(z) = 1 = (1-z^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(2n)} z^{2n} \right] = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} [P_{ii}^{(2n)} - P_{ii}^{(2n-2)}] z^{2n} \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} [P_{ii}^{(2n)} - P_{ii}^{(2n-2)}] = 1 \\ (1-z^2) P_{ij}(z) = z \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} 1 \end{cases}$$

série divergente

comparaison avec

$$\begin{cases} (1-z^2) F_{ii}(z) = \frac{1-z^2}{1-F'_{ii}(z)} = \frac{1+z}{\frac{F_{ii}(z)-1}{z-1}} \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} \frac{2}{\nu_i} = 1 \\ (1-z^2) P_{ij}(z) = (1-z^2) \frac{F_{ij}(z)}{1-F_{ii}(z)} = \frac{z(1+z)}{\frac{F_{ii}(z)-1}{z-1}} \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} \frac{2}{\nu_i} = 1 \end{cases}$$

Résumé:



IV Coefficient ergodique On suppose ici $\text{card } E = N < \infty$.

Déf: $\alpha(P) = \min_{a_i, a_j \in E} \left(\sum_{a_k \in E} \min(P_{ik}, P_{jk}) \right) \in [0, 1]$. $S(P) = 1 - \alpha(P)$, $S(PQ) \leq S(P)S(Q)$
 $= \frac{1}{2} \sup_{a_i, a_j \in E} \sum_{a_k \in E} |P_{ik} - P_{jk}|$

Théorème (Paz): La chaîne est ergodique $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(P^n) = 1$
 $\iff \alpha(P) > 0$
 et alors $\forall k > \frac{N(N-1)}{2}$, $\alpha(P^k) > 0$. $\rightarrow \alpha(P), \alpha(Q) > 0 \Rightarrow \alpha(PQ) > 0$

Procédure: * pour tester $\alpha(P^k) > 0$, on n'a pas besoin des valeurs explicites de P^k , mais seulement besoin de savoir si elles sont > 0 .

$\rightarrow$ on remplace P par $Z(P) = (z_{ij}(P))_{a_i, a_j \in E}$ où $z_{ij}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_{ij} > 0 \\ 0 & \text{si } P_{ij} = 0 \end{cases}$

et on pose $\alpha(Z(P)) = \min_{a_i, a_j \in E} \left(\sum_{a_k \in E} \min(z_{ik}, z_{jk}) \right) = \min_{a_i, a_j \in E} \left(\sum_{a_k \in E} z_{ik} z_{jk} \right)$

et l'on a $\underline{\alpha(Z(P)) > 0 \iff \alpha(P) > 0}$

* Ainsi, on a besoin de tester $\alpha(Z(P^k)) > 0$ jusqu'à $k = \frac{N(N-1)}{2}$.

Or $Z(PQ) = Z(\underbrace{Z(P)Z(Q)}_{\text{matrice à coeff. } \in \mathbb{N}})$ donc $Z(P^k) = Z(Z(P)Z(P^{k-1})) = \dots = Z^{(k)}(P)$

avec $Z^{(k)}(P) = Z(Z^{(k-1)}(P)Z(P))$ à coeff. $\in \{0, 1\}$, i.e. $z_{ij}^{(k)} = \min \left(1, \sum_{a_p \in E} z_{ip}^{(k-1)} z_{pj} \right)$

et l'on a encore : $\underline{\alpha(P^k) > 0 \iff \alpha(Z^{(k)}(P)) > 0}$

* Enfin, au lieu de calculer $\alpha(Z(P)), \alpha(Z^{(2)}(P)), \alpha(Z^{(3)}(P)), \dots$ jusqu'au premier $k \leq \frac{N(N-1)}{2}$ tel que $\alpha(Z^{(k)}(P)) > 0$, il suffit de calculer $\alpha(Z(P)), \alpha(Z^{(2)}(P)),$

$\alpha(Z^{(4)}(P)), \alpha(Z^{(8)}(P))$ jusqu'au premier $2^k \leq \frac{N(N-1)}{2}$ tel que $\alpha(Z^{(2^k)}(P)) > 0$.

$\rightarrow$ gain de mémoire : on ne calcule que des carrés de matrices : $Z^{(2^k)}(P) = Z(Z^{(2^{k-1})}(P))^2$.

Algorithme:

