INSA 4TC
Aimé Lachal

Résumé de files d'attente

Notations générales en régime stationnaire :

- S : temps de service, $\mathbb{E}(S)=\dfrac{1}{\mu}$, $k_S=\dfrac{\sqrt{\operatorname{var}(S)}}{\mathbb{E}(S)}$, $L_S(z)=\mathbb{E}(e^{-zS})$;
- T : temps inter-arrivées, $\mathbb{E}(T)=\dfrac{1}{\lambda}$;
- $\rho=\dfrac{\mathbb{E}(S)}{\mathbb{E}(T)}=\dfrac{\lambda}{\mu}$: intensité du trafic ;
- Q : longueur de la file, $\pi_n=\mathbb{P}(Q=n)$, $G_Q(z)=\mathbb{E}(z^Q)$;
- $\tilde{Q}$: nombre de personnes en attente, $\tilde{Q}=Q-n_0 1\!\!1_{\{Q\geqslant n_0\}}$ s'il y a n_0 serveurs ;
- $\tilde{W}$: temps d'attente, $F_{\tilde{W}}(t)=\mathbb{P}(\tilde{W}\leqslant t)$, $L_{\tilde{W}}(z)=\mathbb{E}(e^{-z\tilde{W}})$;
- W : temps de séjour dans le système, $W=\tilde{W}+S$;

Quelques lois de probabilité :

distribution X	*loi de probabilité*	$\mathbb{E}(X)$	$\operatorname{var}(X)$	k_X	*fonction génératrice* $G_X(z)=\mathbb{E}(z^X)$
loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\dfrac{\rho^n}{n!}\,e^{-\rho},\ n\in\mathbb{N}$	ρ	ρ	$\dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\leqslant 1$	$e^{-\rho(1-z)}$
loi géométrique $\mathcal{G}(\rho)$	$\rho\,(1-\rho)^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{1-\rho}{\rho}$	$\dfrac{1-\rho}{\rho^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho}}$	$\dfrac{\rho}{1-(1-\rho)z}$

distribution X	*densité de probabilité*	$\mathbb{E}(X)$	$\operatorname{var}(X)$	k_X	*transformée de Laplace* $L_X(z)=\mathbb{E}(e^{-zX})$
loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$	$\mu e^{-\mu t}$	$\dfrac{1}{\mu}$	$\dfrac{1}{\mu^2}$	1	$\dfrac{\mu}{z+\mu}$
loi d'Erlang $E_k(\mu)$	$(k\mu)^k\,\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-k\mu t}$	$\dfrac{1}{\mu}$	$\dfrac{1}{k\mu^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{k}}\leqslant 1$	$\left(\dfrac{k\mu}{z+k\mu}\right)^k$
loi hyper-exponentielle	$\displaystyle\sum_{i=1}^n p_i\mu_i e^{-\mu_i t}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\mu_i}$		$k_X\geqslant 1$	$\dfrac{p_i\mu_i}{z+\mu_i}$

Table 1 – File $M(\lambda)/M(\mu)/1$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu}<1$
π_n	$(1-\rho)\rho^n$ loi $\mathcal{G}(1-\rho)$
$\mathbb{E}(Q)$	$\dfrac{\rho}{1-\rho}=\mu\mathbb{E}(\tilde{W})=\lambda\mathbb{E}(W)$
$\mathbb{E}(\tilde{Q})$	$\dfrac{\rho^2}{1-\rho}=\lambda\mathbb{E}(\tilde{W})$
$F_{\tilde{W}}(t)$	$1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t}$ loi $\mathcal{E}(\mu-\lambda)$ pondérée en 0
$\mathbb{E}(\tilde{W})$	$\dfrac{\rho}{\mu-\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\mathbb{E}(\tilde{Q})=\dfrac{1}{\mu}\mathbb{E}(Q)$
$\mathbb{E}(W)$	$\dfrac{1}{\mu-\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Q)$

Table 2 – File $M(\lambda)/M(\mu)/n_0$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu}<n_0$
π_0	$\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{n_0-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{\rho^{n_0}}{n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})}\right)^{-1}$
π_n	$\begin{cases}\pi_0\,\dfrac{\rho^n}{n!} & \text{si } 0\leqslant n<n_0\\ \pi_0\,\dfrac{n_0^{n_0}}{n_0!}\left(\dfrac{\rho}{n_0}\right)^{n} & \text{si } n\geqslant n_0\end{cases}$
$\mathbb{P}(Q\geqslant n_0)$	$\dfrac{\pi_0\rho^{n_0}}{n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})}$
$\mathbb{E}(Q)$	$\rho+\pi_0\dfrac{\rho^{n_0+1}}{(n_0-1)!\,(n_0-\rho)^2}=\lambda\mathbb{E}(W)$
$\mathbb{E}(\tilde{Q})$	$\pi_0\dfrac{\rho^{n_0+1}}{(n_0-1)!\,(n_0-\rho)^2}=\lambda\mathbb{E}(\tilde{W})$
$F_{\tilde{W}}(t)$	$1-\dfrac{\rho^{n_0}}{n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})}\,e^{-(n_0\mu-\lambda)t}$ loi $\mathcal{E}(n_0\mu-\lambda)$ pondérée en 0
$\mathbb{E}(\tilde{W})$	$\dfrac{\pi_0\rho^{n_0}}{n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})}\,\dfrac{1}{n_0\mu-\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\mathbb{E}(\tilde{Q})$
$\mathbb{E}(W)$	$\mathbb{E}(\tilde{W})+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Q)$

Table 3 – File $M(\lambda)/M(\mu)/1/N$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu}$
π_n	$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\,\rho^n & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+1} & \text{si } \rho = 1 \end{array}\right\}$ pour $0 \leqslant n \leqslant N$
$\mathbb{E}(Q)$	$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\rho[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2} & \text{si } \rho = 1 \end{array}\right.$
$\mathbb{E}(\tilde{Q})$	$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\rho^2[1-N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N]}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{N(N-1)}{2(N+1)} & \text{si } \rho = 1 \end{array}\right.$
$\mathbb{E}(\tilde{W})$	$\dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(\tilde{Q})$
$\mathbb{E}(W)$	$\mathbb{E}(\tilde{W}) + \dfrac{1}{\mu}\,(1-\pi_N) = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(Q)$

Table 4 – File $M(\lambda)/M(\mu)/\infty$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu}$
π_n	$e^{-\rho}\,\dfrac{\rho^n}{n!}$ loi $\mathcal{P}(\rho)$
$\mathbb{E}(Q)$	$\rho = \lambda\mathbb{E}(W)$
$\tilde{Q}$	0
$\tilde{W}$	0
$\mathbb{E}(W)$	$\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(Q)$

Table 5 – File $M(\lambda)/M(\mu)/n_0/n_0$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu}$
π_0	$\dfrac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^{n_0}}{n_0!}}$
π_n	$\pi_0\,\dfrac{\rho^n}{n!}$ pour $0 \leqslant n \leqslant n_0$
$\mathbb{E}(Q)$	$\rho\,\dfrac{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^{n_0-1}}{(n_0-1)!}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^{n_0}}{n_0!}}$
$\tilde{Q}$	0
$\tilde{W}$	0
$\mathbb{E}(W)$	$\dfrac{1}{\mu}\,(1-\pi_{n_0}) = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(Q)$

Table 6 – File $M(\lambda)/GI/1$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$
$G_Q(z)$	$(1-\rho)(1-z)\dfrac{L_S(\lambda(1-z))}{L_S(\lambda(1-z))-z}$
π_0	$1-\rho$
$\mathbb{E}(Q)$	$\rho + \dfrac{1+k_S^2}{2}\,\dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \lambda\mathbb{E}(W)$
$\mathbb{E}(\tilde{Q})$	$\dfrac{1+k_S^2}{2}\,\dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \lambda\mathbb{E}(\tilde{W})$
$L_{\tilde{W}}(z)$	$\dfrac{(1-\rho)z}{z-\lambda(1-L_S(z))}$
$\mathbb{E}(\tilde{W})$	$\dfrac{1+k_S^2}{2}\,\dfrac{\rho}{\lambda-\mu} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(\tilde{Q})$
$\mathbb{E}(W)$	$\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1+k_S^2}{2}\,\dfrac{\rho}{\lambda-\mu} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(Q)$

TABLE 7 – FILE $M(\lambda)/D(d)/1$

ρ	$\lambda d < 1$
$G_Q(z)$	$(1-\rho)(1-z)\dfrac{1}{1-ze^{\rho(1-z)}}$
$\mathbb{E}(Q)$	$\dfrac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)} = \lambda\mathbb{E}(W)$
$\mathbb{E}(\tilde{Q})$	$\dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \lambda\mathbb{E}(\tilde{W})$
$L_{\tilde{W}}(z)$	$\dfrac{(1-\rho)z}{z-\lambda(1-e^{-dz})}$
$\mathbb{E}(\tilde{W})$	$\dfrac{\rho d}{2(1-\rho)} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(\tilde{Q})$
$\mathbb{E}(W)$	$\dfrac{(2-\rho)d}{2(1-\rho)} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(Q)$

TABLE 8 – FILE $M(\lambda)/E_k(\mu)/1$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$
$\mathbb{E}(Q)$	$\rho + \dfrac{1+k}{2k}\,\dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \lambda\mathbb{E}(W)$
$\mathbb{E}(\tilde{Q})$	$\dfrac{1+k}{2k}\,\dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \lambda\mathbb{E}(\tilde{W})$
$\mathbb{E}(\tilde{W})$	$\dfrac{1+k}{2k}\,\dfrac{\rho}{\mu-\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(\tilde{Q})$
$\mathbb{E}(W)$	$\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1+k}{2k}\,\dfrac{\rho}{\mu-\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{E}(Q)$

TABLE 9 – FILE $GI/M(\mu)/1$

ρ	$\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$
π_n	$(1-\alpha)\alpha^n$ loi $\mathcal{G}(1-\alpha)$ avec $\alpha \in]0,1[$, $\alpha = L_T(\mu(1-\alpha))$
$\mathbb{E}(Q)$	$\dfrac{\alpha}{1-\alpha} = (\mu\alpha)\mathbb{E}(W) = \mu\mathbb{E}(\tilde{W})$
$\mathbb{E}(\tilde{Q})$	$\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha} = (\mu\alpha)\mathbb{E}(\tilde{W})$
$F_{\tilde{W}}(t)$	$1-\alpha e^{-(1-\alpha)\mu t}$ loi $\mathcal{E}((1-\alpha)\mu)$ pondérée en 0
$\mathbb{E}(\tilde{W})$	$\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)\mu}$
$\mathbb{E}(W)$	$\dfrac{1}{(1-\alpha)\mu}$

Files d'attente avec priorités

Notations générales en régime stationnaire pour deux files de priorité i, $i = 1, 2$, la première file étant prioritaire devant la deuxième :

– S_i : temps de service de la personne de priorité i, $\mathbb{E}(S_i) = \dfrac{1}{\mu_i}$;
– T_i : temps entre les arrivées consécutives de deux personnes de priorité i, $\mathbb{E}(T_i) = \dfrac{1}{\lambda_i}$; $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$;
– $\overline{S}_2$: temps de service de la personne de priorité 2, durée des interruptions de service comprise ;
– B_1 : période d'activité du serveur avec des personnes de priorité 1 ;
– $\rho_i = \dfrac{\mathbb{E}(S_i)}{\mathbb{E}(T_i)} = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$;
– Q_i : longueur de la file de priorité i ;
– $\tilde{Q}_i$: nombre de personnes de priorité i en attente ;
– $\tilde{W}_i$: temps d'attente d'une personne de priorité i ;
– W_i : temps de séjour dans le système d'une personne de priorité i.

Table 10 – File avec priorités, préemption et achèvement de service

$L_{B_1}(z)$	solution de $L_{B_1}(z) = L_{S_1}(z + \lambda_1[1 - L_{B_1}(z)])$
$G_{Q_1}(z)$	$(1-\rho_1)(1-z)\dfrac{L_{S_1}(\lambda_1(1-z))}{L_{S_1}(\lambda_1(1-z)) - z}$
$\mathbb{P}(Q_1 = 0)$	$1 - \rho_1$
$\mathbb{E}(Q_1)$	$\rho_1 + \dfrac{1+k_{S_1}^2}{2}\,\dfrac{\rho_1^2}{1-\rho_1} = \lambda_1 \mathbb{E}(W_1)$
$\mathbb{E}(\tilde{Q}_1)$	$\dfrac{1+k_{S_1}^2}{2}\,\dfrac{\rho_1^2}{1-\rho_1} = \lambda_1 \mathbb{E}(\tilde{W}_1)$
$L_{\tilde{W}_1}(z)$	$\dfrac{(1-\rho_1)z}{z - \lambda_1(1 - L_{S_1}(z))}$
$\mathbb{E}(\tilde{W}_1)$	$\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1)}{2(1-\rho_1)}$
$\mathbb{E}(W_1)$	$\dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1)}{2(1-\rho_1)}$
$L_{\overline{S}_2}(z)$	$L_{S_2}(z + \lambda_1[1 - L_{B_1}(z)])$
$\mathbb{E}(\overline{S}_2)$	$\dfrac{1}{(1-\rho_1)\mu_2}$
$G_{Q_2}(z)$	$L_{W_2}(\lambda_2(1-z)) = L_{\tilde{W}_2}(\lambda_2(1-z)) L_{\overline{S}_2}(\lambda_2(1-z))$
$\mathbb{P}(Q_2 = 0)$	$(1-\rho)\,\dfrac{\lambda - \lambda_1 L_{B_1}(\lambda_2)}{\lambda_2}$
$\mathbb{E}(Q_2)$	$\dfrac{\rho_2}{1-\rho_1} + \lambda_2\,\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2))\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} = \lambda_2 \mathbb{E}(W_2)$
W_2	$\tilde{W}_2 + \overline{S}_2$
$L_{\tilde{W}_2}(z)$	$(1-\rho)\dfrac{z + \lambda_1(1 - L_{B_1}(z))}{z - \lambda_2[1 - L_{S_2}(z + \lambda_1(1 - L_{B_1}(z)))]}$
$\mathbb{E}(\tilde{W}_2)$	$\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$
$\mathbb{E}(W_2)$	$\dfrac{1}{(1-\rho_1)\mu_2} + \dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$

Table 11 – File avec priorités sans préemption

$L_{B_1}(z)$	solution de $L_{B_1}(z) = L_{S_1}(z + \lambda_1[1 - L_{B_1}(z)])$
$G_{Q_1}(z)$	$\dfrac{\lambda_1(1-\rho)(1-z)L_{S_1}(\lambda_1(1-z)) + \lambda_2[L_{S_1}(\lambda_1(1-z)) - zL_{S_2}(\lambda_1(1-z))]}{\lambda[L_{S_1}(\lambda_1(1-z)) - z]}$
$\mathbb{P}(Q_1 = 0)$	$1 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda}\,\rho$
$\mathbb{E}(Q_1)$	$\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\,\rho + \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda}\,\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)}$
$\mathbb{E}(\tilde{Q}_1)$	$\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda}\,\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)}$
$L_{\tilde{W}_1}(z)$	$\dfrac{(1-\rho)z + \lambda_2[1 - L_{S_2}(z)]}{z - \lambda_1(1 - L_{S_1}(z))}$
$\mathbb{E}(\tilde{W}_1)$	$\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)}$
$\mathbb{E}(W_1)$	$\dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)}$
$\mathbb{E}(Q_2)$	$\dfrac{\lambda_2}{\lambda}\,\rho + \dfrac{\lambda_2[\lambda + \lambda_1(1-\rho)]}{\lambda}\,\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2))\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$
W_2	$\tilde{W}_2 + S_2$
$L_{\tilde{W}_2}(z)$	$(1-\rho)\dfrac{z + \lambda_1(1 - L_{B_1}(z))}{z - \lambda_2[1 - L_{S_2}(z + \lambda_1(1 - L_{B_1}(z)))]}$
$\mathbb{E}(\tilde{W}_2)$	$\dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$
$\mathbb{E}(W_2)$	$\dfrac{1}{\mu_2} + \dfrac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$