Variables aléatoires continues

Exercice 1

Une personne doit se rendre à un rendez-vous à 17 h 30. Elle appelle un taxi qui arrive à son domicile entre 16 h et 17 h à un instant $16+T$ où T suit une loi uniforme sur [0,1]. Etant donné la circulation, la durée de la course est

$$\begin{cases} D = \dfrac{T+1}{2} \text{ si } T \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ D = \dfrac{3T}{2} \text{ si } T > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de l'heure d'arrivée au rendez-vous.
2. Déterminer l'espérance mathématique de l'heure d'arrivée.
3. Sachant que la personne est arrivée à l'heure à son rendez-vous, quelle est la probabilité que le taxi soit arrivé chez elle avant 16 h 30 ?

Exercice 2 (Moyenne et quantiles)

Soit X une v.a. de fonction de répartition continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in]0,1[$, on note $Q(p)$ le p–quantile de X défini par $\mathbb{P}(X \leqslant Q(p)) = p$.

1. On suppose que $X \geqslant 0$ et que $\mathbb{E}(X)$ existe. Montrer que $Q(p) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{1-p}$.
2. On suppose que la loi de X est symétrique par rapport à 0 et que $\mathbb{E}(X^2)$ existe. Montrer que $Q(\frac{3}{4}) - Q(\frac{1}{4}) \leqslant 2\sqrt{2}\sigma(X)$.

Exercice 3 (Loi Gamma)

La loi Gamma de paramètres (a, λ) est la loi absolument continue de densité $\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$. On rappelle que pour $a > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$ et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

1. Calculer la moyenne et la variance de la loi Gamma.
2. Supposons que le taux de l'humidité de l'air, Λ, un jour donné suit une loi Gamma de paramètres (a, μ). On note N le nombre d'accidents durant ce jour et T_n le temps écoulé entre les n-ième et $(n+1)$-ième acccidents. On suppose qu'étant donné $\Lambda = \lambda$, N suit la loi de Poisson de paramètre λ et que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est indépendante et identiquement distribuée de loi exponentielle de paramètre λ.
   (a) Montrer que la distribution conditionnelle de Λ sachant $N = n$ est la loi Gamma de paramètres $(a+n, \mu+1)$.
   (b) Montrer que la distribution conditionnelle de Λ sachant $T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n$ est la loi Gamma de paramètres $(a+n, \mu+t_1+\cdots+t_n)$.

Exercice 4 (Lois Bêta-Gamma)

Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois Gamma de paramètres respectifs (a, λ) et (b, λ). On pose $U = X+Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$. On donne $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

1. Déterminer la densité du couple aléatoire (U, V).
2. En déduire les lois de U et V. Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 5

Soit X une v.a. suivant la loi Gamma de paramètres (n, λ) et Y une v.a. suivant la loi de Poisson de paramètre λt. Montrer que $\mathbb{P}(Y < n) = \mathbb{P}(X > t)$.

Application.— Soit T_n le temps qui s'écoule entre les arrivées des $(n-1)$–ième et n–ième clients à un guichet de France Telecom. On suppose que deux clients n'arrivent jamais simultanément. Soit N_t la v.a. représentant le nombre de clients pendant l'intervalle de temps $[0, t]$.

Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(N_t = n)$ en admettant que les T_n sont des v.a. exponentielles de même paramètre λ indépendantes.

Exercice 6 (Loi de Cauchy)

1. Soit Θ une v.a. suivant la loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On pose $C = \tan\Theta$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition ainsi que la densité de la v.a. C.
   (b) Calculer la médiane de C. Que dire de l'espérance de C ?
2. Soit X et Y deux v.a. indépendantes normalement distribuées. Déterminer la densité de la v.a. $\frac{X}{Y}$.

Exercice 7

Soit R une v.a. suivant la loi de Rayleigh dont la densité est donnée par $f_R(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(r)$ et Θ une v.a. suivant la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

1. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la densité de la v.a. $\cos\Theta$.
2. Calculer la densité du couple aléatoire $(R\cos\Theta, R\sin\Theta)$.

Exercice 8 (Déplacement aléatoire dans le plan ou l'espace)

1. On considère une particule dans un plan et se déplaçant par sauts de longueur fixe mais orientés dans n'importe quelle direction. Plus précisément, on admettra que la longueur des sauts est égale à une unité, tandis que l'angle entre l'axe des abscisses et la direction prise à la suite d'un saut est une v.a. uniforme sur $[0, 2\pi]$. On supposera également que les sauts sont indépendants les uns des autres.
   Calculer la moyenne du carré de la distance entre la particule et sa position initiale après n sauts.
2. Reprendre le problème dans l'espace.

Exercice 9 (Statistiques d'ordre)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n–échantillon d'une v.a. X absolument continue de fonction de répartition F et de densité f. On réordonne cet échantillon en la suite $X_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$.

1. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ des nombres tels que $x_i + \varepsilon_i \leqslant x_{i+1} - \varepsilon_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   On pose $I_i = [x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i]$. Montrer que $\mathbb{P}(X_{(1)} \in I_1, \ldots, X_{(n)} \in I_n) = n! \prod_{i=1}^{n} [F(x_i + \varepsilon_i) - F(x_i - \varepsilon_i)]$.
2. En déduire la densité conjointe des v.a. $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$.
3. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la densité de $X_{(i)}$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X_{(1)} \geqslant x, X_{(n)} \leqslant y)$. En déduire la densité du couple $(X_{(1)}, X_{(n)})$, puis celle de l'étendue de l'échantillon : $R = X_{(n)} - X_{(1)}$.
5. Examiner les cas particuliers où :
   (a) X suit la loi uniforme sur [0,1] ;
   (b) X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Application.— n personnes sont échelonnées « au hasard » sur une route longue d'un kilomètre.

1. Quelle est la probabilité que les personnes soient espacées d'au moins d kilomètres, $d \leqslant \frac{1}{n-1}$?
2. Calculer la distance moyenne séparant les deux personnes extrêmes.

Exercice 10

1. Soit X une v.a. à valeurs dans $[a, b]$ et $\Phi \in C^2([a, b])$. En utilisant une formule de Taylor, prouver l'inégalité

$$|\mathbb{E}(\Phi(X)) - \Phi(\mathbb{E}(X))| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{var}\,(X) \sup_{x\in[a,b]} |\Phi''(x)|.$$

2. Démontrer alors le résultat suivant :
   Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue non identiquement nulle et $\Phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On pose $c = \dfrac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$. Alors

$$\Big|\int_a^b \Phi(x)f(x)\,dx - \Phi(c)\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{x\in[a,b]} |\Phi''(x)| \int_a^b f(x)\,dx.$$

   On pourra remarquer que pour toute v.a. X à valeurs dans $[a, b]$, $\mathrm{var}\,(X) = \mathrm{var}\,(X - \frac{a+b}{2})$ et $|X - \frac{a+b}{2}| \leqslant \frac{b-a}{2}$.

Exercice 11 (Lois du Khi-Deux, de Student et de Fisher)

1. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes normalement distribuées. On pose
$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$
   (a) Déterminer la densité de la v.a. Y_1.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y_1, puis déterminer sa fonction caractéristique.
   (c) Montrer par récurrence que la v.a. Y_n suit la loi Gamma de paramètres $(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. (On donne $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ pour $a, b > 0$.)
   (d) Calculer l'espérance et la variance de Y_n, puis déterminer sa fonction caractéristique.
2. Soit $X, X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes normalement distribuées. On pose
$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \text{et} \quad T = \sqrt{n}\,\frac{X}{\sqrt{Y}}.$$
   (a) Déterminer la densité du couple (X, T), puis celle de la v.a. T.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de T lorsqu'elles sont définies. (On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan\theta$ dans l'intégrale donnant $\mathrm{var}\,(T)$; on donne $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\theta\,\sin^{2b-1}\theta\,d\theta$ pour $a, b > 0$.)
3. Soit $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ des v.a. indépendantes normalement distribuées. On pose
$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad V = \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 \quad \text{et} \quad F = \frac{mU}{nV}.$$
   (a) Déterminer la densité du couple (U, F), puis celle de la v.a. F.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de F lorsqu'elles sont définies. (On pourra effectuer un changement de variable analogue à celui utilisé en 3.(b).)

Exercice 12 (Statistique des échantillons gaussiens)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de la loi gaussienne X de paramètres (μ, σ^2). On définit la moyenne et l'écart-type empiriques de cet échantillon respectivement par
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

1. Reconnaître la loi de $\overline{X}$. Calculer $\mathbb{E}(\overline{X})$, $\mathrm{var}\,(\overline{X})$ et $\mathbb{E}(S_X^2)$.
2. Soit A une matrice orthogonale de type $n \times n$ dont tous les termes de la première ligne sont égaux à $1/\sqrt{n}$. On pose $(Y_1, \ldots, Y_n) = (X_1, \ldots, X_n)\ {}^tA$.
   (a) Déterminer la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$. En déduire celle de $(Y_1, \ldots, Y_n)$. Quelle est alors la loi de $(Y_1, \ldots, Y_n)$?
   (b) Exprimer $\overline{X}$ et S_X^2 en fonction de $Y_1, \ldots, Y_n$.
   (c) Déduire de (a) et (b) que $\overline{X}$ et S_X^2 sont indépendantes.
   (d) Déterminer la loi de $\frac{n-1}{\sigma^2}S_X^2$.
3. On pose
$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S_X}.$$
   Déterminer la loi de T.
4. On considère un deuxième échantillon $(Y_1, \ldots, Y_m)$ de X indépendant de $(X_1, \ldots, X_n)$ et l'on pose
$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}, \quad \Sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{m+n-2} \quad \text{et} \quad U = \sqrt{\frac{mn}{m+n}}\,\frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\Sigma}.$$
   Déterminer les lois des v.a. F, $\frac{m+n-1}{\sigma^2}\Sigma^2$ et U.

Exercice 13 (Simulation aléatoire)

I — Le résultat fondamental

Soit $X : \Omega \longrightarrow]a,b[$ (éventuellement $a=-\infty$, $b=+\infty$) une v.a. absolument continue de fonction de répartition F continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $]a,b[$.

Montrer que la v.a. $U = F\circ X$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

II — Un générateur de nombres aléatoires

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{0,\dots,9\}$. On pose $X = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{10^n}$.

Calculer $\mathbb{P}(X<a)$ et $\mathbb{P}(X=a)$ pour tout $a\in]0,1[$. On introduira le développement décimal propre (illimité) de a : $a=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$. Reconnaître alors la loi de X.

III — Exemples

Dans les exemples ci-dessous, U désigne une v.a. uniformément distribuée sur]0,1[et $U_1,\dots,U_n$ des v.a. indépendantes uniformément distribuées sur]0,1[. Vérifier les assertions suivantes :

1. $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln U$ suit la loi exponentielle de paramètre λ ;
2. $X = -\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln U_i$ suit la loi Gamma de paramètres (n,λ) ;
3. $(X,Y) = (\sqrt{-2\ln U_1}\ \cos 2\pi U_2, \sqrt{-2\ln U_1}\ \sin 2\pi U_2)$ suit la loi normale sur $\mathbb{R}^2$ et alors X suit la loi normale sur $\mathbb{R}$;
4. $X = [U+p]$ ([.] désignant la partie entière) et $X = \mathbb{1}_{\{U<p\}}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre p ;
5. $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}[U_i+p]$ et $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{U_i<p\}}$ suivent la loi binomiale de paramètre (n,p) ;
6. $X = 1+\left[\dfrac{\ln U}{\ln(1-p)}\right]$ et $X=\min\{n\geqslant 1 : U_n\leqslant p\}$ suivent la loi géométrique de paramètre p ;
7. $X = \min\{n\geqslant 1 : \prod\limits_{i=1}^{n} U_i \leqslant e^{-\lambda}\}-1$ suit la loi de Poisson de paramètre λ ;
8. $X = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\ln U_i$ et $X = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\ln U_i + Y^2$, où Y est une v.a. gaussienne indépendante de $U_1,\dots,U_n$, suivent respectivement les lois du Khi-Deux à $2k$ et $2k+1$ degrés de liberté.
9. $X = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\ln U_i}{\sum_{i=1}^{m+n}\ln U_i}$ suit la loi Bêta de paramètres (m,n).

Exercice 14 (Fiabilité)

I — Définitions générales

On considère un élément (par exemple mécanique ou électrique) (E) qui, à partir de sa mise en service, est soumis à un risque de panne. Lorsqu'une panne survient, l'élément (E) cesse de fonctionner. Soit T la durée de service (aléatoire) de (E). On suppose que T est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ absolument continue de densité f_T. On définit :

- la fiabilité de l'élément (E) : $R_T(t) = \mathbb{P}(T\geqslant t)$;
- le taux de panne de (E) : $\lambda_T(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$;
- la durée de vie moyenne de (E) : $\overline{T} = \mathbb{E}(T)$ (ou encore MTBF : mean time before failure).

1. Interpréter le taux de panne λ_T en termes de probabilité conditionnelle de défaillance entre deux instants infiniment proches t et $t+dt$.
2. Que vaut $R_T'(t)$? En déduire l'expression de $f_T(t)$ en fonction de $\lambda_T(t)$.

Exemples. Déterminer $f_T(t)$ et $R_T(t)$ dans chacun des cas suivants :

1. taux de panne constant : $\lambda_T(t) = \lambda$;
2. taux de panne linéaire : $\lambda_T(t) = \lambda t$;
3. taux de panne puissance : $\lambda_T(t) = \lambda t^{\alpha}$;
4. taux de panne exponentiel : $\lambda_T(t) = \lambda e^{\alpha t}$.

II — Etude de quelques systèmes

On considère maintenant un système matériel (S) formé de n éléments identiques $(E_1), \ldots, (E_n)$, mis en service au même instant, dont les durées de vie $T_1, \ldots, T_n$ sont des v.a. indépendantes identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Les n éléments $(E_1), \ldots, (E_n)$ sont montés en série. On note X_n la durée de fonctionnement du système (S) ; celui-ci est en panne dès que l'un au moins des (E_i) cesse de fonctionner.
   (a) Exprimer X_n en fonction de $T_1, \ldots, T_n$.
   (b) Déterminer la fiabilité R_{X_n} de (S), son taux de panne λ_{X_n}, sa durée de vie moyenne $\overline{X}_n$ ainsi que $\text{var}\,(X_n)$.
2. Les n éléments $(E_1), \ldots, (E_n)$ sont montés en parallèle. On note Y_n la durée de fonctionnement du système (S) ; celui-ci ne tombe en panne que lorsque tous les (E_i) ont cessé de fonctionner.
   (a) Exprimer Y_n en fonction de $T_1, \ldots, T_n$.
   (b) Déterminer la fiabilité R_{Y_n} de (S), puis son taux de panne λ_{Y_n}. Montrer que λ_{Y_n} est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\lim_{t \to +\infty} \lambda_{Y_n}(t)$.
   (c) Calculer la durée de vie moyenne de (S) : $\overline{Y}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} R_{Y_n}(t)\ dt$.
   (d) Montrer que $\text{var}\,(Y_n) = \dfrac{1}{\lambda^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i^2}$. On pourra utiliser la formule $\mathbb{E}(Y_n^2) = 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} t R_{Y_n}(t)\ dt$.
3. Pour chacun des systèmes suivants, calculer la fiabilité ainsi que la la durée de vie moyenne :