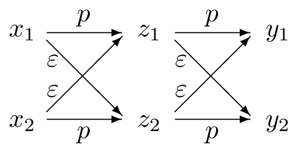
Théorie de l'information

Exercice 1

1. Calculer la quantité d'information contenue dans l'expérience consistant à effectuer une partition d'un ensemble de cardinal n en k sous-ensembles de cardinaux $n_1, \ldots, n_k$ avec $n_1 + \ldots + n_k = n$ (les entiers $k, n_1, \ldots, n_k$ sont fixés).
2. Calculer la limite de cette information lorsque les entiers $n, n_1, \ldots, n_k$ tendent vers l'infini de telle manière que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $\dfrac{n_i}{n} \longrightarrow p_i \in]0,1[$. Comparer le résultat obtenu à l'entropie d'une v.a. de loi de probabilité $\{p_1, \ldots, p_k\}$. Interprétation ? (Utiliser la formule de Stirling.)

Exercice 2

1. Deux canaux binaires symétriques identiques sont reliés en cascade selon le schéma ci-dessous ($\varepsilon = 1 - p$). Ecrire la matrice de bruit du canal résultant puis calculer sa capacité.



2. Une source discrète émet les signaux $x_1, \ldots, x_n$ à travers un canal générant du bruit. On réceptionne à la sortie du canal les signaux $y_0, y_1, \ldots, y_n$ selon le schéma ci-dessous : à chaque signal émis x_i correspond un signal reçu y_i avec une probabilité p ainsi qu'un signal parasitaire commun à tous, y_0, transmis avec une probabilité $\varepsilon = 1 - p$.

Ecrire la matrice de bruit du canal $P_{Y|X} = \Big(\mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i)\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant n}$, puis calculer la capacité du canal $C = \max_X I(X, Y)$.

Exercice 3 (Information de Kullback et distributions d'entropie maximale)

Soit X et Y deux v.a. de lois discrètes respectives $\{p_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $\{q_i, i \in \mathbb{N}\}$ (resp. de lois absolument continues de densités respectives f et g) telles que $\forall i \in \mathbb{N}$, $p_i = 0 \Longrightarrow q_i = 0$ (resp. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = 0$). On définit la quantité (information de Kullback de Y par rapport à X)

$$I(Y||X) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \log_2 \frac{q_i}{p_i} \quad \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \log_2 \frac{g(x)}{f(x)}\, dx\right)$$

avec la convention $\log_2 \frac{a}{b} = 0$ si $a = 0$ ou $b = 0$. On définit des expressions analogues lorsque X et Y sont des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

1. Calculer l'entropie d'une loi uniforme, d'une loi géométrique, d'une loi exponentielle, d'une loi gaussienne.
2. En utilisant la convexité de la fonction $x \mapsto x \log_2 x$, montrer que pour toute v.a. X et Y, $I(Y||X) \geqslant 0$.
3. Exprimer $I(Y||X)$ en fonction des entropies $H(X)$ et $H(Y)$ dans les cas suivants :
   (a) X suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$ (resp. $[a, b]$) et $Y(\Omega) \subset \{1, \ldots, n\}$ (resp. $[a, b]$) ;
   (b) X suit la loi géométrique (resp. exponentielle) de paramètre $\frac{1}{\lambda}$ et Y est une v.a. discrète (resp. absolument continue) telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ (resp. $[0, +\infty[$) et $\mathbb{E}(Y) = \lambda$ où λ est fixé ;
   (c) X suit la loi gaussienne de paramètres (m, σ^2) et Y est une v.a. absolument continue telle que $\mathbb{E}(Y) = m$ et $\mathrm{var}\,(Y) = \sigma^2$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ sont fixés.
4. Prouver alors les résultats suivants :
   (a) Soit E l'ensemble des v.a. discrètes (resp. absolument continues) à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ (resp. $[a, b]$). Alors, l'entropie est maximale sur E pour toute v.a. uniformément répartie sur $\{1, \ldots, n\}$ (resp. $[a, b]$).
   (b) Soit E l'ensemble des v.a. discrètes (resp. absolument continues) X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (resp. $[0, +\infty[$) telles que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ où $\lambda > 0$ est fixé. Alors, l'entropie $H(X)$ est maximale sur E pour toute v.a. X géométrique (resp. exponentielle) de paramètre $\frac{1}{\lambda}$.
   (c) Soit E l'ensemble des v.a. absolument continues X telles que $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathrm{var}\,(X) = \sigma^2$ où m et $\sigma > 0$ sont fixés. Alors, l'entropie $H(X)$ est maximale sur E pour toute v.a. X gaussienne de paramètres (m, σ).

5. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. discrètes (resp. absolument continues) indépendantes et $Y_1, \dots, Y_n$ d'autres v.a. discrètes (resp. absolument continues) indépendantes telles que chaque couple (X_i, Y_i) satisfasse la condition imposée dans l'introduction. On pose $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$.

   Exprimer $I(\mathbf{Y}||\mathbf{X})$ à l'aide des informations $I(Y_i||X_i)$, $i = 1, \dots, n$ (on pourra commencer avec $n = 2$), puis calculer $I(\mathbf{Y}||\mathbf{X})$ et $I(V||U)$ dans chacun des cas suivants :

   (a) Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_n$ suivent les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ et $U = X_1 + \ldots + X_n$, $V = Y_1 + \ldots + Y_n$.

   (b) Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_n$ suivent les lois exponentielles de densités respectives $f_{X_1}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)$ et $f_{Y_1}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-b)} \mathbb{1}_{[b,+\infty[}(x)$ avec $a \leqslant b$, $\lambda > 0$ et $U = \min(X_1, \dots, X_n)$, $V = \min(Y_1, \dots, Y_n)$.

   (c) Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_n$ suivent les lois uniformes respectivement sur $[0, a]$ et $[0, b]$ avec $b \leqslant a$ et $U = \max(X_1, \dots, X_n)$, $V = \max(Y_1, \dots, Y_n)$.

Exercice 4

Soit (X, Y) un couple aléatoire absolument continu et (U, V) le couple défini par $U = aX + bY$ et $V = cX + dY$ où $ad - bc \neq 0$.

Exprimer l'entropie de (U, V) à l'aide de celle de (X, Y) et de a, b, c, d.

Application.— On suppose que X et Y sont deux v.a. indépendantes normalement distribuées. Déterminer la matrice de covariance $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ du couple aléatoire gaussien (U, V), puis calculer l'entropie $H(U, V)$, ainsi que la transinformation $I(U, V)$ en fonction de A, B, C.