Chaînes de Markov à temps discret

Exercice 1

Un lac de barrage a une capacité de 3 unités de volume, le trop-plein se déversant dans un bassin avoisinant. Soit X_n la quantité d'eau retenue au début de la n-ième journée, $n \in \mathbb{N}$. L'amenée d'eau par jour est donnée par une variable aléatoire Y dont la distribution est

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = k)$	0.2	0.5	0.2	0.1

Le débit journalier est constant et vaut 1 unité (lorsque cela est possible). On suppose, pour simplifier le problème, que l'arrivée et le débit d'eau se font simultanément.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et construire sa matrice de transition.
2. Calculer le régime stationnaire.

Exercice 2

1. Une unité de production comprend deux machines automatiques fonctionnant indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est égale à $1 - p$. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois.
   (a) Modéliser l'évolution dans le temps de ce phénomène aléatoire par un processus stochastique à temps discret (on choisira pour X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée, $n \in \mathbb{N}^*$).
   (b) Vérifier qu'il s'agit d'une chaîne de Markov, déterminer sa matrice de transition et dessiner son graphe.
2. On suppose maintenant qu'une machine tombée en panne au cours d'une journée nécessite deux jours de réparation et que les deux machines peuvent être réparées en même temps.
   (a) Vérifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est plus une chaîne de Markov.
   (b) Construire un espace des états permettant de décrire ce processus par une chaîne de Markov et dessiner son graphe de transition. (On fera intervenir le nombre de machines en panne et l'état d'avancement de l'intervention : première journée ou deuxième journée de réparation.)

Exercice 3

On dispose de deux boîtes et de $2d$ boules dont d sont noires et d sont rouges. Au départ, il y a d boules dans chaque boîte. A chaque instant n, on tire au hasard une boule de chaque boîte et l'on met chacune d'entre elles dans la boîte opposée. Soit X_n le nombre de boules noires dans la première boîte juste après l'instant n. Trouver la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

Pour les chaînes de Markov ayant les matrices de transitions suivantes, déterminer les états transitoires et récurrents, puis calculer pour la première les probabilités $f_{ij}^* = \mathbb{P}_{a_i}(\tau_{a_j} < +\infty)$ où $\tau_{a_j} = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = a_j\}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Pour chaque matrice de transition ci-dessous, montrer que la chaîne de Markov associée est irréductible, trouver sa période et déterminer sa loi stationnaire.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

1. Classifier les états des chaînes de Markov ayant les matrices de transitions suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Calculer $\mathbb{P}_{a_0}(X_n = a_0)$ pour la chaîne de Markov définie sur l'ensemble $E = \{a_0, a_1, a_2\}$, de matrice de transition
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
.

Exercice 7

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'espace des états est $\mathbb{N}$ et dont les probabilités de transition sont données par $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,0} = 1-p$, où $p \in]0,1[$ est fixé, et les autres $p_{ij} = 0$.

1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. On définit $\tau_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0\}$. Calculer $f_{00}^{(n)} = \mathbb{P}_0\{\tau_0 = n\}$ pour $n \geqslant 1$.
3. Montrer que la chaîne est récurrente.

Exercice 8 (Chaîne à deux états)

Soit $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ où $p, q \in [0,1]$. P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'espace des états est une paire $E = \{a_1, a_2\}$.

1. Montrer que si $p + q > 0$, alors
$$P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-(p+q))^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} P^n$ lorsque cette limite existe et expliciter la distribution stationnaire π.
3. On suppose $0 < p+q < 2$. Déterminer $A > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tel que $\forall a_i, a_j \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| < A\rho^n$.
4. On pose $\tau_{a_j} = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = a_j\}$. Calculer $\mathbb{P}_{a_i}(\tau_{a_j} = n)$ puis $\mathbb{E}_{a_i}(\tau_{a_j})$ pour $a_i, a_j \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur E. Soient $F \subset E$ et $\tau_F = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n \notin F\}$. On suppose que $\mathbb{P}_{a_i}(\tau_F < +\infty) = 1$ pour tout $a_i \in E$ et l'on pose $\mu_i = \mathbb{E}_{a_i}(\tau_F)$. Montrer que $(\mu_i)_{a_i\in E}$ vérifie le système d'équations suivant :
$$\mu_i = 1 + \sum_{a_j\in F} p_{ij}\mu_j, \text{ pour tout } a_i \in F.$$
(On pourra conditionner par la v.a. X_1).