Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Corrigé de l'examen final de 5 juin 2007

Exercice I. *Soient H une fonction réelle continue d'une variable réelle et $A(0,0)$ et $B(1,1)$ deux points dans le plan $\mathbb{R}^2$.*

(1) *Démontrer que l'intégrale curviligne*

$$\int_A^B H(x^2+y^2)x\,\mathrm{d}x + H(x^2+y^2)y\,\mathrm{d}y$$

ne depend pas du choix de chemin reliant A et B.

(2) *Calculer cette intégrale pour $H(u) = 2\cos u$.*

(1) L'intégrale curviligne entre deux points ne depend pas du chemin choisi si c'est une intégrale d'une forme différentielle exacte, c'est-à-dire d'une expression du type dF, où F est une fonction de deux variables. C'est le cas ici.

La fonction H étant continue mais peut-être pas de classe C^1, on ne peut pas utiliser le lemme de Poincaré car on ne peut pas vérifier si $\partial(H(x^2+y^2)x)/\partial y = \partial(H(x^2+y^2)y)/\partial x$. Ce qu'on peut utiliser c'est que H a une primitive. Soit h une primitive de $H(u)$: $h'(u) = H(u)$. Soit $F(x,y) = \dfrac{h(x^2+y^2)}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= \tfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy \\ &= \tfrac{1}{2}(h'(u)\big|_{u=x^2+y^2}2xdx + h'(u)\big|_{u=x^2+y^2}2ydy) \\ &= H(x^2+y^2)xdx + H(x^2+y^2)dy. \end{aligned}$$

Finalement, $\int_A^B dF(x,y) = F(x,y)|_A^B = F(B) - F(A)$ ne dépend que des extremités du chemin reliant A et B.

(2) Si $H(u) = 2\cos u$, alors $h(u) = \sin u$ et $F(x,y) = \sin(x^2+y^2)$. Donc

$$\begin{aligned} \int_A^B 2\cos(x^2+y^2)xdx + 2\cos(x^2+y^2)ydy &= \int_A^B d(\sin(x^2+y^2)) \\ &= \sin(x^2+y^2)|_A^B = \sin(1^2+1^2) - \sin 0 = \sin 2. \end{aligned}$$

Exercice II. *Soit l'ensemble*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

(1) *Dessiner D.*

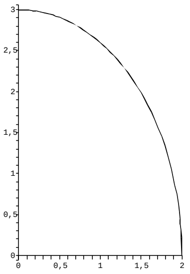
(2) *Soit C l'ensemble des points du bord de D. Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe C en un point $(x_0, y_0) \in C$, en supposant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.*

(3) *Calculer de deux façons différentes l'intégrale $I = \iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,*

(a) *en utilisant le changement de variables :* $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$;

(b) *en utilisant la formule de Green-Riemann.*

(1) Voici le dessin :



(2) Soit $t \to \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $(t \in [0, \pi/2])$ la paramétrisation de l'équation $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Soit t_0 la valeur de t tel que $x_0 = 2\cos t_0$ et $y_0 = 3\sin t_0$. La droite tangente à la courbe C en ce point (x_0, y_0) est une droite parallèle à la direction du vecteur tangent $\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath}\right\}\Big|_{t=t_0}$. Par conséquent, son équation est

$$\frac{x - x_0}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{y - y_0}{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t} \quad \text{où} \quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = -2\sin t_0 = -\frac{2}{3}y_0; \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = 3\cos t_0 = \frac{3}{2}x_0.$$

La droite tangente a pour équation : $-\dfrac{3}{2}\dfrac{x - x_0}{y_0} = \dfrac{2}{3}\dfrac{y - y_0}{x_0}$.

Une autre façon de trouver l'équation de la droite tangente à une courbe se base sur le fait que le gradient de la fonction $F(x, y)$ est perpendiculaire à la direction tangente (la courbe est définie par une relation $F(x, y) = 0$). Dans notre cas $F(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1$, et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x_0, y_0) = \partial F/\partial x\ \vec{\imath} + \partial F/\partial y\ \vec{\jmath}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{2}{4}x_0\ \vec{\imath} + \frac{2}{9}y_0\ \vec{\jmath}$.

Un vecteur $(x - x_0)\vec{\imath} + (y - y_0)\vec{\jmath}$ est perpendiculair au $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(x_0, y_0)$ si et seulement si leur produit scalaire est 0 ce qui donne l'équation de la droite tangente:

$$\Big((x - x_0)\vec{\imath} + (y - y_0)\vec{\jmath}\Big)\left(\frac{2}{4}x_0\vec{\imath} + \frac{2}{9}y_0\vec{\jmath}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(x - x_0)x_0 + \frac{2}{9}(y - y_0)y_0 = 0.$$

(3) (a) Le Jacobien du changement de variables $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$ est

$$\det\begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3r\cos\theta \end{pmatrix} = 6r,$$

alors $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, les bornes sont $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$. L'intégrale devient :

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2}(2r\cos\theta - 3r\sin\theta)\ 6r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 12r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \ -\ \int_0^1 18r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -2.$$

(b) La formule de Green-Riemann :

$$\int_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Alors on cherche $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ tel que $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) = x - y$. Il y a une infinité de possibilités. Nous pouvons mettre $P(x, y) = 0$ ce qui definira Q par $\partial Q/\partial x = x - y$ et par exemple $Q(x, y) = x^2/2 - xy$ fera l'affaire. L'intégrale à calculer sera alors:

$$\int_C (x^2/2 - xy)\,\mathrm{d}y.$$

La courbe C consiste en 3 morceaux γ_1, γ_2, γ_3. On peut les paramétrer:

$$\gamma_1 : t \to \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases},\ t \in [0, 2] \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = 0\,\mathrm{d}t\ ; \end{cases}$$

$$\gamma_2 : t \to \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases},\ t \in [0, \pi/2] \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x = -2\sin t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = 3\cos t\,\mathrm{d}t\ ; \end{cases}$$

$$\gamma_3 : t \to \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases},\ t \in [0, 3] \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x = 0\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}t\ ; \end{cases}$$

Les parties de l'intégrale sur γ_1 et γ_3 donnent 0. Ce qui reste c'est

$\int_{\gamma_2}(x^2/2 - xy)\,\mathrm{d}y = \int_{\gamma_2}((2\cos t)^2/2 - 2\cos t\ 3\sin t)3\cos t\,\mathrm{d}t$
$= \int_0^{\pi/2}(6\cos^3 t - 18\cos^2 t\ \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(6\cos^3 t - 18\cos^2 t\ \sin t)\,\mathrm{d}t$
$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 3t\,\mathrm{d}t + \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t - 18\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\ d(-\cos t) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 6 = -2.$

Où on utilise que $\cos^3 t = (\frac{e^{it}+e^{-it}}{2})^3 = \frac{1}{4}(\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + 3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}) = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t$. (Si on veut absolument éviter avoir le $\cos^3 t$ on n'a qu'à choisir P et Q différemment, par exemple, $P = xy$ et $Q = xy$ ou bien utiliser que $\cos^3 t = \cos t - \sin^2 t\cos t$.)

Exercice III. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x^3(a-x) - b^2y^2$, avec $a, b > 0$.*

(1) *Déterminer les extrema locaux et globaux de f.*
(2) *Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(a,0)$.*

On considère maintenant la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ définie par la condition $f(x,y) = 0$.

(3) *Représenter graphiquement Γ en déterminant les points de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels la tangente à la courbe est soit horizontale, soit verticale. On pourra éventuellement s'aider de la symétrie naturelle de la courbe Γ.*
(4) *Déterminer le plus grand ensemble de points de Γ pour lesquels le théorème des fonctions implicites s'applique.*
(5) *Vérifier que l'aire de la figure délimitée par Γ vaut $\frac{\pi a^3}{8b}$. On pourra éventuellement utiliser le changement de variable suivant: $x = \frac{a}{2}(1-\cos t)$ et effectuer l'intégration pour la variable x sur l'intervalle $[0,a]$.*

(1) On cherche les points critiques :

$$\begin{aligned} \partial f/\partial x &= x^2(3a-4x) = 0 &&\Rightarrow\ x = 0 \text{ ou } x = \frac{3a}{4} \\ \partial f/\partial y &= -b^2 2y = 0 &&\Rightarrow\ y = 0 \end{aligned}$$

On trouve deux points critiques : $(0,0)$ et $\left(\frac{3a}{4}, 0\right)$ avec les valeurs $f(0,0) = 0$, $f\left(\frac{3a}{4}, 0\right) = \frac{3^3a^4}{4^4}$. Calcul des derivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6ax - 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2b^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Le déterminant de la matrice hessienne au point $(0,0)$ est 0 ce qui nous force a regarder la fonction autour de $(0,0)$ pour constater que c'est un point selle. En effet, $f(0,0) = 0$ mais pour $x = 0$ et y quelconque la fonction prend les valeurs negatives, tandis que pour $y = 0$ et $x < a$ la fonction est positive. Ce qui signifie que au voisinage du point $(0,0)$ la fonction f prend des valeurs negatives et positives, donc elle n'a pas d'un extremum en $(0,0)$.

En $\left(\frac{3a}{4}, 0\right)$ le déterminant de la matrice hessienne est égale à $-\frac{9a^2b^2}{2} < 0$ - c'est un maximum local. Sur $\mathbb{R}^2$ il n'y a pas de minimum global car f peut être arbitrairement petit - il suffit de prendre y suffisament grand. On remarque que pour $|x| > a$ la valeur est négative pour tout y donc on peut conclure $(\frac{3a}{4}, 0)$ est un point de maximum global.

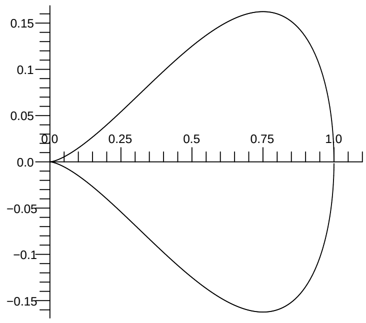
(2)

$$\begin{aligned} f(x,y) = \ & x^3(a-x) - b^2y^2 = f(a,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,0)y \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,0)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,0)(x-a)y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,0)y^2\right) + o(\|(x-a,y)\|^2) \\ & = -a^3(x-a) - 3a^2(x-a)^2 - b^2y^2 + o(\|(x-a,y)\|^2) \end{aligned}$$

(3) La courbe $x^3(a-x) - b^2y^2 = 0$ a une présentation explicite sur son domaine de définition $(x \in [0,a])$: $y = \pm\frac{x\sqrt{x(a-x)}}{b}$. Elle est symétrique par rapport à l'axe Ox. Elle a un point

singulier en $(0,0)$ - les deux dérivés partielles sont 0. La tangente est horizontale au point $(3a/4, 0)$.

Voici la courbe pour $a = 1,\ b = 2$:



(4) La fonction f est de classe C^∞. Le théorème des fonctions implicites : il existe un intervale ouvert I contenant x et un intervale ouvert J contenant y et une fonction $g : I \to J$ de classe C^∞ tel que pour $(x,y) \in I \times J$ on a l'équivalence $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ si $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Donc le théorème des fonctions implicites n'applique pas si $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, ce qui est le cas pour les points de la courbe $(0,0)$ et $(a,0)$.

On peut aussi exprimer x localement comme fonction de y si $\dfrac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, i.e. $x \neq 0, x \neq \dfrac{3a}{4}$. En conclusion, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites, c'est à dire on ne peut pas exprimer y comme fonction de x, ni x comme fonction de y en un seul point de la courbe : $(0,0)$, le point où le gradient est nul (le point $(\dfrac{3a}{4}, 0)$ n'appartient pas à la courbe).

Pour tous les autres points de la courbe, le théorème des fonctions implicites s'applique.

(5) L'aire est donnée par l'intégrale double avec les bords $0 \leq x \leq a$ et $y_0 \leq y \leq y_1$ avec $y_0 = -\frac{x\sqrt{x(a-x)}}{b}$, $y_1 = \frac{x\sqrt{x(a-x)}}{b}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \ & 2\int_0^a \frac{x\sqrt{x(a-x)}}{b}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{b}\int_0^\pi \frac{a}{2}(1-\cos t)\sqrt{\frac{a}{2}(1-\cos t)\frac{a}{2}(2-(1-\cos t))}\frac{a}{2}\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{b}\int_0^\pi \frac{a}{2}(1-\cos t)\frac{a}{2}\sqrt{(1-\cos^2 t)}\frac{a}{2}\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^3}{4b}\int_0^\pi (1-\cos t)\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^3\pi}{8b}.
\end{aligned}$$

Exercice IV. (1) La fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

- (a) n'admet pas de limite en $(x,y) = (0,0)$; ☑
- (b) admet la limite 0 en $(0,0)$; ☐
- (c) admet la limite 1 en $(0,0)$. ☐

(2) La dérivée d'une fonction de classe C^1, f de deux variables dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ est donnée par la formule

- (a) $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y) \cdot \vec{u}$; ☑
- (b) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t\vec{u}) - f(x,y)}{t}$; ☑
- (c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t\vec{u})}{t}$. ☐

(3) Le plan normal à une courbe dans l'espace en un point

- (a) peut être tangent à une surface qui contient cette courbe; ☐
- (b) est donné par deux équations du type : $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$; ☐
- (c) est perpendiculaire au vecteur tangent à la courbe en ce point. ☑

(4) La fonction $f(x, y) = x^{2007} + y^{2007}$

- (a) possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (b) possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (c) possède un maximum sur le carré $C = \{1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$. ☑

(5) La condition nécessaire pour qu'un champ de vecteurs $\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$ soit un champ de gradient est

- (a) $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$; ☐
- (b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{V} = 0$; ☑
- (c) $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x,\ \partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$ et $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$. ☑

(6) Le changement de variables $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$ a pour jacobien $\dfrac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)}$:

- (a) -1; ☐
- (b) 1; ☐
- (c) ρ; ☑
- (d) $\rho^2 \cos\theta \sin\theta$. ☐

(7) Une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs; ☐
- (b) paramètre une courbe dans l'espace; ☑
- (c) peut paramétrer un plan dans l'espace. ☐

(8) Une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs; ☐
- (b) paramètre une courbe dans l'espace; ☐
- (c) peut paramétrer un plan dans l'espace. ☑

(9) Soit Δ le triangle défini par les trois droites : $x = 0,\ y = 1$ et $y = x$. L'intégrale double $\displaystyle\iint_\Delta xe^{xy}$ est égale à

- (a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{xy}\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$; ☐
- (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y xe^{xy}\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$; ☑
- (c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 xe^{xy}\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$; ☑
- (d) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x xe^{xy}\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$. ☐

(10) Soit $\overrightarrow{V} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$. Le rotationel de $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}$, est égal à

(a) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & xz \end{vmatrix}$; ☑

(b) $-x - y - z$; ☐

(c) $-(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k})$. ☑

(11) Soit $\overrightarrow{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. La divergence de $\overrightarrow{F}$, $\text{div}\overrightarrow{F}$, est égale à

(a) 0; ☐

(b) 3; ☑

(c) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. ☐

(12) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Alors :

(a) $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$ est toujours $\overrightarrow{0}$; ☑

(b) $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$ est toujours 0 ; ☐

(c) $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est une application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$. ☑