Examen final, deuxième session
Corrigé du 25 juin 07

Exercice 1

1) Pour $a = 1$, $b = \frac{5}{3}$, on a $V(x,y) = (\nabla f)(x,y)$ avec
$f(x,y) = x^3 y \sin(y) - \frac{2}{3} x^3 \cos(y) + cte$

2) Vu que $V = \nabla f$, l'intégrale curviligne de V entre $(0,0)$ et $(0,1)$ ne dépend que des valeurs de f prises en ces points. Plus précisément, $\int \vec{V} \cdot d\vec{\gamma} = f((0,1)) - f((0,0)) = 0$.

3) cf cours.

Exercice 2

1) On a $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xy$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = x^2 + \frac{2y}{1+y^2}$.

Donc $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$.

On ne peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites ni pour exprimer y comme fonction de x, ni x comme fonction de y.

2) Pour $a \neq 0$ et $y = ax$, on a $g_a(x) = h(x, ax) = ax^3 + \ln(1 + a^2 x^2)$.

Ainsi $\frac{\partial g_a}{\partial x}(x) = 3ax^2 + \frac{2a^2 x}{1 + a^2 x^2}$, et $\frac{\partial g_a}{\partial x}(0) = 0$.

Pour déterminer la nature du point 0, on calcule la deuxième dérivée de g_a :

$$\frac{\partial^2 g_a}{\partial x^2}(x) = 6ax + \frac{2a^2(1+a^2x^2) - 2a^2 x \cdot 2a^2 x}{(1 + a^2 x^2)^2} = 6ax + \frac{2a^2}{(1+a^2x^2)^2}$$

et donc $\frac{\partial^2 g_a}{\partial x^2}(0) = 2a^2 > 0$.

La fonction g_a est donc convexe dans un voisinage de 0 et sa 1ère dérivée s'annule en 0 $\Rightarrow$ g_a admet un minimum local en 0.

Idem pour $m(y) = h(0,y) = \ln(1+y^2)$, qui est convexe au voisinage de $y=0$ et admet un minimum local en $y=0$.

3) En revanche la fonction $n(x) = h(x,0) = 0$. Donc h s'annule sur toute la droite d'équation $y=0$, et ne peut donc admettre un minimum local en $(0,0)$.

Exercice 3

1) La longueur L_α de la courbe de $\mathbb{R}^3$ vaut :

$$L_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g'(t)^2 + (\sin(t)')^2 + (\cos(t)')^2}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g'(t)^2 + 1}\, dt .$$

La longueur de la courbe plane est directement donnée par $L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+(g'(t))^2}\, dt$, qui est la même expression. Remarquons qu'on a implicitement utilisé la paramétrisation $[-\pi, \pi] \ni t \longmapsto (t, g(t)) \in \mathbb{R}^2$ de la courbe.

2) Pour $g(t) = (\pi^2 - t^2)^{1/2}$, on a

$$L_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\tfrac{1}{4}\left((\pi^2 - t^2)^{-1/2}(-2)t\right)^2 + 1}\; dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{t^2}{\pi^2 - t^2} + 1}\; dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{t^2}{\pi^2}}}\; dt = \pi \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-u^2}}\; du$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} \cos\theta \, d\theta = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\, d\theta = \pi^2 .$$

Exercice 5

$$I = \iiint_D z\, dx\, dy\, dz \overset{\text{coo. sphériques}}{=} \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \; r\cos\theta \; r^2 \sin\theta$$

$$= \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} \sin^2\theta \Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16} .$$

Exercice 4

1) • $x(t) = 0$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$. On a alors $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y(\pi) = 0$, $y(\frac{3\pi}{2}) = -1$, $y(2\pi) = 0$.

De même $y(t) = 0$ pour $t \in \{0, \pi, 2\pi\}$. On a alors $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$ et $x(2\pi) = 0$.

• On a $x'(t) = 2\cos 2t$ et $x'(t) = 0$ pour $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

$y'(t) = \cos t$ et $y'(t) = 0$ pour $t \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.

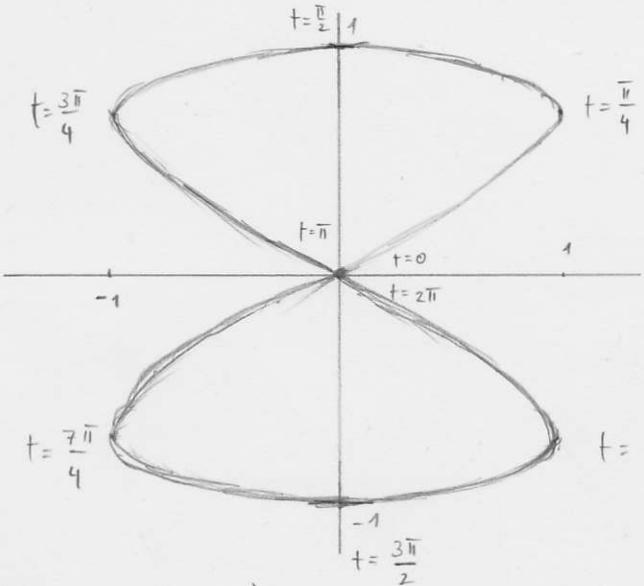
• Soit $m(t)$ la pente de la tangente à la courbe au point $(x(t), y(t))$. Alors $m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. La tangente est donc horizontale pour $t \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Elle est verticale pour $t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.

• Les valeurs extrémales de la courbe sont prises pour les valeurs de t pour lesquelles soit $x'(t) = 0$, soit $y'(t) = 0$. A savoir dans les points :

$t = \frac{\pi}{4}$, $(x(\frac{\pi}{4}), y(\frac{\pi}{4})) = (1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $t = \frac{\pi}{2}$, $(x, y) = (0, 1)$

$t = \frac{3\pi}{2}$, $(x, y) = (-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $t = \frac{5\pi}{4}$, $(x, y) = (1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$t = \frac{3\pi}{2}$, $(x, y) = (0, -1)$, $t = \frac{7\pi}{4}$, $(x, y) = (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.



2) $x(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x'(\pi/3) = -1$, $y'(\pi/3) = \frac{1}{2}$

→ équation de la tangente : $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.