Viscoélastodynamique monodimensionnelle avec des conditions de Signorini aux bords

Adrien PETROV
Université Claude Bernard-Lyon 1, Mathématiques, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex, France (petrov@maply.univ-lyon1.fr)

Michelle SCHATZMAN
Université Claude Bernard-Lyon 1, Mathématiques, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex, France (schatz@maply.univ-lyon1.fr)

Mots-clefs : viscoélastodynamique, conditions de Signorini, traces, formulation variationnelle

Résumé. Le problème viscoélastique simplifié

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{xxt} = f, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \quad \alpha > 0,$$

avec des conditions unilatérales aux bords

$$\begin{aligned} &(u(0,t) + a_0) \geq 0, \quad -(u_x + \alpha u_{xt})(0,t) \geq 0, \quad (u(0,t) + a_0)\big((u_x + \alpha u_{xt})(0,t)\big) = 0, \\ &(u(L,t) + a_L) \geq 0, \quad (u_x + \alpha u_{xt})(L,t) \geq 0, \quad (u(L,t) + a_L)\big((u_x + \alpha u_{xt})(L,t)\big) = 0, \end{aligned}$$

et des conditions initiales

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{et} \quad u_t(\cdot, 0) = u_1,$$

modélise une barre de longueur L qui vibre longitudinalement entre deux obstacles. On prouve l'existence d'une solution en passant à la limite dans le problème pénalisé et en utilisant les estimations d'énergie préalablement établies. On détermine ensuite les espaces fonctionnels qui caractérisent les contraintes aux bords.

1 Introduction et notations

Les premiers résultats significatifs concernant les problèmes de vibrations d'un milieu élastique soumis à des contraintes unilatérales sur le bord ont été obtenus par Amerio et Prouse [3, 4], Schatzman [11] dans le cas d'un obstacle continu et par Amerio [1, 2], Schatzman [12], Citrini [5] et Marchionna [6] dans le cas d'un obstacle ponctuel. Le problème élastodynamique reste complétement ouvert en plus d'une dimension d'espace. Notons qu'il n'existe à l'heure actuelle qu'un résultat d'unicité établi par Lebeau et Schatzman dans [9] pour l'équation des ondes avec contrainte unilatérale au bord dans un demi-espace. Par ailleurs, des résultats d'existence ont été obtenus dans un cadre plus général pour des problèmes viscoélastodynamiques avec contact dans [7] et [8] mais sans information sur le bilan d'énergie; de plus la trace de la contrainte normale n'est définie que par dualité dans ces travaux, ce qui ne permet pas de dire si c'est effectivement une trace au sens habituel du terme.
On considère une barre de longueur L qui vibre longitudinalement entre deux obstacles; chaque extrémité de la barre est libre de se mouvoir tant qu'elle ne touche pas l'obstacle. Expliquons la modélisation. Nous supposerons dans cet article que le matériau est un matériau de Kelvin-Voigt et qu'il est homogène et isotrope. Soit x la coordonnée le long de la barre avec pour origine une des extrémités et soit $u(x,t)$ le déplacement au temps t du point matériel x. Soit f la densité des forces extérieures dépendant du temps et de l'espace. Le déplacement u satisfait l'équation suivante:

$$u_{tt} - \sigma_x = f \quad \text{dans} \quad (0,L) \times (0,T), \tag{1}$$

avec une loi constitutive de Kelvin-Voigt:

$$\sigma = u_x + \alpha u_{xt}, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

et des conditions initiales

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{et} \quad u_t(\cdot, 0) = u_1, \tag{3}$$

où u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx} et u_{xt} désignent les dérivées de u. Supposons que les obstacles en 0 et L aient pour coordonnées respectives: $a_0 \geq 0$ et $a_L \geq 0$. Les conditions aux limites viennent de la formulation variationnelle et elles seront complètement justifiées plus loin. Ces conditions sont respectivement en $x = 0$ et $x = L$:

$$(u(0, \cdot) + a_0) \geq 0, \quad -(u_x + \alpha u_{xt})(0, \cdot) \geq 0, \quad (u(0, \cdot) + a_0)\big((u_x + \alpha u_{xt})(0, \cdot)\big) = 0, \tag{4a}$$

$$(u(L, \cdot) + a_L) \geq 0, \quad (u_x + \alpha u_{xt})(L, \cdot) \geq 0, \quad (u(L, \cdot) + a_L)\big((u_x + \alpha u_{xt})(L, \cdot)\big) = 0. \tag{4b}$$

Les conditions (4a)-(4b) sont appelées conditions de Signorini. On se donne des données initiales de Cauchy u_0 et u_1; on suppose que la position initiale u_0 appartient à l'espace de Sobolev $H^2(0, L)$ et satisfait les conditions de compatibilité $u_0(0) \geq -a_0$ et $u_0(L) \geq -a_L$. La vitesse initiale u_1 appartient à $L^2(0, L)$ et la densité des forces appartient à $L^2(0, T; L^2(0, L))$.
Pour tout $\tau \in [0, T]$, on définit les ensembles suivants:

$$Q_\tau = (0, L) \times (0, \tau), \quad Q_\tau^- = \mathbb{R}^- \times (0, \tau), \quad \Sigma_\tau = \{0, L\} \times (0, \tau).$$

Soit K le convexe:

$$K = \{v \in H^1(Q_T) : v_{xt} \in L^2(Q_T), v(0, \cdot) \geq -a_0, v(L, \cdot) \geq -a_L\}.$$

La formulation faible du problème (1)-(4b) est obtenue de la manière suivante: on multiplie (1) par $v - u$, pour tout $v \in K$, on intègre ensuite formellement sur Q_τ le résultat ainsi obtenu; on en déduit la formulation suivante:

$$\left\{\begin{aligned} & u \in K \text{ et pour tout } v \in K \text{ et pour presque tout } \tau \in [0, T], \\ & \qquad \int_0^L \big(u_t(v - u)\big)\Big|_0^\tau dx - \int_{Q_\tau} u_t(v_t - u_t)\, dx\, dt \\ & \quad + \int_{Q_\tau} (u_x + \alpha u_{xt})(v_x - u_x)\, dx\, dt \geq \int_{Q_\tau} f(v - u)\, dx\, dt. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

L'équivalence entre cette formulation faible et la formulation forte (1)-(4b) n'est pas triviale, elle dépend de l'information précise sur la trace de u_{xt} en $\{x = 0\}$ et en $\{x = L\}$.
Expliquons maintenant le plan de cet article.
Nous montrons que si u_0 et u_1 appartiennent à $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, si f et f_t appartiennent à $L^2(Q_T)$ et v est solution de (1)-(3) avec des conditions de Dirichlet en $x = 0$ et $x = L$ alors les traces $(v_x + \alpha v_{xt})\big|_{\Sigma_T}$ sont bornées dans $H^{1/2}(0, T)$.
Ensuite nous définissons un problème pénalisé de (1)-(4b) pour lequel on prouve l'existence d'une unique solution.
On établit alors des estimations sur le problème pénalisé; il est possible de déduire de ces estimations l'existence d'une solution faible pour le problème (1)-(4b).
Par des estimations d'énergie, on prouve enfin que la trace $u\big|_{\Sigma_T}$ est bornée dans $H^{5/4}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

2 Résultats de régularité pour un problème viscoélastique avec des conditions de Dirichlet aux bords

Soit v la solution de

$$v_{tt} - v_{xx} - \alpha v_{xxt} = f, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

avec des conditions aux limites

$$v(0,\cdot) = e^{-t}\big(u_0(0) + a_0\big) \quad \text{et} \quad v(L,\cdot) = e^{-t}\big(u_0(L) + a_L\big), \tag{7}$$

et des conditions initiales

$$v(\cdot,0) = u_0 \quad \text{et} \quad v_t(\cdot,0) = u_1. \tag{8}$$

Théorème 2.1 *Si u_0 et u_1 appartiennent à $H^2(0,L) \cap H^1(0,L)$ et si f et f_t appartiennent à $L^2(Q_T)$, alors v a les propriétés fonctionnelles suivantes:*

$$v \in W^{2,\infty}(0,T; L^2(0,L)), \tag{9a}$$
$$v_x \in W^{2,\infty}(0,T; L^2(0,L)) \cap H^2(0,T; L^2(0,L)), \tag{9b}$$
$$v_{xx} \in L^\infty(0,T; L^2(0,L)), \tag{9c}$$
$$v_{xxt} \in L^2(Q_T). \tag{9d}$$

Preuve: On indique ici la démarche à suivre pour établir (9). La fin de la preuve se déduit simplement d'une méthode de Galerkin. On établit des estimations d'énergie; en multipliant (6) par v_t puis en intégrant par parties par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L \big(|v_t(\cdot,\tau)|^2 + |v_x(\cdot,\tau)|^2\big)\,dx + \alpha \int_{Q_\tau} |v_{xt}|^2\,dx\,dt \\ = \int_{Q_\tau} f v_t\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^L \big(|u_1|^2 + |u_{0,x}|^2\big)\,dx.\end{aligned}$$

Une simple application du lemme de Gronwall montre que si u_0 appartient à $L^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)$, si u_1 appartient à $L^2(0,L)$ et si f appartient à $L^2(Q_T)$, alors v_t et v_x sont bornées dans $L^\infty(0,T; L^2(0,L))$, v_{xt} est bornée dans $L^2(Q_T)$. En multipliant (6) par v_{xx} puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que v_{xx} est bornée dans $L^\infty(0,T; L^2(0,L))$; on effectue ce calcul en intégrant tout d'abord $v_{xx}v_{tt}$ en temps puis en espace. En multipliant (6) par v_{xxt}, puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que v_{xxt} est bornée dans $L^2(Q_T)$. En dérivant (6) par rapport à t puis en multipliant le résultat ainsi obtenu par v_{tt}, on trouve que v_{xtt} est bornée dans $L^2(Q_T)$ si f_t est bornée dans $L^2(Q_T)$. □

Corollaire 2.2 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, les fonctions définies par*

$$g_0 = -(v_x + \alpha v_{xt})(0,\cdot) \quad \text{et} \quad g_L = -(v_x + \alpha v_{xt})(L,\cdot) \tag{10}$$

sont bornées dans $H^{1/2}(0,T)$.

Preuve: Cette preuve est une conséquence de la théorie classique des traces des espaces de Sobolev. □

3 Existence et unicité de la solution pénalisée

On approche (1)-(4b) en remplaçant les contraintes rigides (4a) par des contraintes très raides: si la contrainte est atteinte alors la réponse est linéaire et si la contrainte n'est pas atteinte alors la réponse est nulle. Plus précisément, soit $r^- = -\min(r, 0)$, on remplace u par u^ε dans (1) et on considère le problème suivant:

$$u^\varepsilon_{tt} - u^\varepsilon_{xx} - \alpha u^\varepsilon_{xxt} = f \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \quad \alpha > 0, \tag{11}$$

avec des conditions aux limites

$$(u^\varepsilon_x + \alpha u^\varepsilon_{xt})(0,\cdot) = -m^\varepsilon(0,\cdot) \quad \text{et} \quad (u^\varepsilon_x + \alpha u^\varepsilon_{xt})(L,\cdot) = m^\varepsilon(L,\cdot), \tag{12}$$

et des conditions initiales

$$u^\varepsilon(\cdot,0) = u_0 \quad \text{et} \quad u^\varepsilon_t(\cdot,0) = u_1, \tag{13}$$

où

$$m^\varepsilon(0,\cdot) = \frac{\left(u^\varepsilon(0,\cdot) + a_0\right)^-}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad m^\varepsilon(L,\cdot) = \frac{\left(u^\varepsilon(L,\cdot) + a_L\right)^-}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Soient

$$h_0(t) = e^{-t}\big(u_0(0) + a_0\big), \tag{15a}$$
$$h_L(t) = e^{-t}\big(u_0(L) + a_L\big). \tag{15b}$$

Soit

$$w^\varepsilon = e^{-\nu t}(u^\varepsilon - v);$$

alors w^ε est solution de l'équation

$$\big(\nu + \partial_t\big)^2 w^\varepsilon - \big(1 + \alpha\big(\nu + \partial_t\big)\big) w^\varepsilon_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \tag{16}$$

avec des conditions aux limites

$$-\big(1 + \alpha\big(\nu + \partial_t\big)\big) w^\varepsilon_x(0,t) = -e^{-\nu t} g_0(t) + \big(w^\varepsilon(0,t) + e^{-\nu t} h_0(t)\big)^-/\varepsilon, \tag{17a}$$
$$\big(1 + \alpha\big(\nu + \partial_t\big)\big) w^\varepsilon_x(L,t) = e^{-\nu t} g_L(t) + \big(w^\varepsilon(L,t) + e^{-\nu t} h_L(t)\big)^-/\varepsilon, \tag{17b}$$

et des conditions initiales

$$w^\varepsilon(\cdot,0) = w^\varepsilon_t(\cdot,0) = 0. \tag{18}$$

Soit ω la variable duale de t et

$$\widehat{z}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} z(t)\, dt,$$

la transformée de Fourier de z. On prolonge g_0 et g_L par 0 sur $\mathbb{R}^-$ et sur $[T, \infty)$; de la même manière, on prolonge h_0 et h_L par 0 sur $\mathbb{R}^-$. On suppose que la solution w^ε s'annule pour $t < 0$. On prend la transformée de Fourier partielle en temps de (16), et on voit que $\widehat{w}^\varepsilon(\cdot,\omega)$ satisfait

$$\widehat{w}^\varepsilon_{xx} = \frac{(\nu + i\omega)^2}{1 + \alpha(\nu + i\omega)}\, \widehat{w}^\varepsilon. \tag{19}$$

Soit

$$\widehat{\lambda}^2(\omega) = \frac{(\nu + i\omega)^2}{1 + \alpha(\nu + i\omega)}, \quad \Re\widehat{\lambda}(\omega) > 0.$$

On montre maintenant qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \nu \geq 1, \quad \forall \omega > 0, \quad \Re\widehat{\lambda}(\omega) \geq C\big(1 + \sqrt{|\omega|}\big).$$

Il suffit de regarder le cas où $\omega \geq 0$, l'autre cas se déduit par une conjugaison complexe. On montre tout d'abord que $\widehat{\lambda}^2$ ne peut pas appartenir à $\mathbb{R}^-$; s'il existe un nombre positif tel que $\widehat{\lambda}^2(\omega) = -r$, on aurait $-r(1+\alpha(\nu+i\omega)) = \nu^2 - \omega^2 + 2i\alpha\nu\omega$. En prenant la partie imaginaire, on obtient que $-\alpha\omega r = 2\alpha\nu\omega$, ce qui n'est possible que si ω s'annule; mais alors, en prenant la partie réelle, on voit que $-r(1+\alpha\nu) = \nu^2$, ce qui est une contradiction. Une expression de $\widehat{\lambda}(\omega)$ est

$$\widehat{\lambda}(\omega) = \frac{\nu + i\omega}{\sqrt{1+\alpha(\nu+i\omega)}},$$

en prenant la détermination principale de la racine carrée. Soit $z = \nu + i\omega$. Au voisinage de l'infini dans $\mathbb{C}$, on a

$$\frac{z}{\sqrt{1+\alpha z}} - \sqrt{\frac{z}{\alpha}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \tag{20}$$

en prenant la détermination principale. Un calcul élémentaire permet de déduire que $\arg(1 + \alpha z) \geq \arg(z)/2$ si et seulement si $\alpha^2(\omega^2+\nu^2) \geq 1$. Sur ce domaine,

$$\arg\left(\frac{z}{\sqrt{1+\alpha z}}\right) \geq \frac{3\pi}{8} \quad \text{si} \quad \Re z \geq 0.$$

On remarque également que $\arg \widehat{\lambda}(\omega) < \pi/2$ si $\omega \geq 0$ et $\nu > 0$; alors il existe $\theta < \pi/2$ tel que

$$\forall \omega \geq 0, \quad \forall \nu \geq 1, \quad \arg \widehat{\lambda}(\omega) \leq \theta.$$

Alors (20) permet de déduire qu'il existe $C > 0$ ne dépendant pas de ν tel que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et pour tout $\nu \geq 1$

$$\Re\widehat{\lambda}(\omega) \geq C\big(1 + \sqrt{\nu} + \sqrt{|\omega|}\big). \tag{21}$$

Donc la partie réelle de $\widehat{\lambda}(\omega)$ est toujours strictement positive. En particulier,

$$\lim_{\omega\to+\infty} \arg \widehat{\lambda}(\omega) = \frac{\pi}{4},$$

ceci permet de déduire que l'argument de $\widehat{\lambda}(\omega)$ est inférieur à $\theta < \pi/2$. Par ailleurs, il est évident que pour $\omega = +\infty$

$$|\widehat{\lambda}(\omega)| \sim \sqrt{\frac{|\omega|}{\alpha}},$$

et puisque la partie réelle de $\widehat{\lambda}(\omega)$ est strictement positive, il en découle qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \Re\widehat{\lambda}(\omega) \geq C\big(1 + \sqrt{|\omega|}\big). \tag{22}$$

La solution de (19) est une combinaison linéaire de $\exp\big(-\widehat{\lambda}x\big)$ et $\exp\big(\widehat{\lambda}x\big)$, avec des coefficients dépendant de ω. Elle est donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{w}^\varepsilon(x,\omega) =& \frac{\widehat{w}^\varepsilon(0,\omega) - e^{-\widehat{\lambda}L}\widehat{w}^\varepsilon(L,\omega)}{1-e^{-2\widehat{\lambda}L}}\, e^{-\widehat{\lambda}x} \\ &+ \frac{-e^{-\widehat{\lambda}L}\widehat{w}^\varepsilon(0,\omega) + \widehat{w}^\varepsilon(L,\omega)}{1-e^{-2\widehat{\lambda}L}}\, e^{\widehat{\lambda}(x-L)}.\end{aligned} \tag{23}$$

On déduit de (22) que $1 - \exp\big(-2\widehat{\lambda}L\big)$ ne s'annule jamais. Soit

$$\widehat{\eta}(\omega) = \exp\big(-\widehat{\lambda}(\omega)L\big);$$

en utilisant la notation ci-dessus, on calcule $\widehat{w}_x^\varepsilon(0,\omega)$ et $\widehat{w}_x^\varepsilon(L,\omega)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
-\widehat{w}_x^\varepsilon(0,\omega) &= \frac{\widehat{\lambda}}{1-\widehat{\eta}^2}\big(\widehat{w}^\varepsilon(0,\omega)-\widehat{\eta}\widehat{w}^\varepsilon(L,\omega)\big)-\frac{\widehat{\lambda}\widehat{\eta}}{1-\widehat{\eta}^2}\big(-\widehat{\eta}\widehat{w}^\varepsilon(0,\omega)+\widehat{w}^\varepsilon(L,\omega)\big),\\
\widehat{w}_x^\varepsilon(L,\omega) &= -\frac{\widehat{\lambda}\widehat{\eta}}{1-\widehat{\eta}^2}\big(\widehat{w}^\varepsilon(0,\omega)-\widehat{\eta}\widehat{w}^\varepsilon(L,\omega)\big)+\frac{\widehat{\lambda}}{1-\widehat{\eta}^2}\big(-\widehat{\eta}\widehat{w}^\varepsilon(0,\omega)+\widehat{w}^\varepsilon(L,\omega)\big).
\end{aligned}
$$

Soit une matrice M dont la transformée de Fourier est

$$
\widehat{M}(\omega)=\frac{\widehat{\lambda}(1+\alpha(\nu+i\omega))}{1-\widehat{\eta}^2}\begin{pmatrix}1+\widehat{\eta}^2 & -2\widehat{\eta}\\ -2\widehat{\eta} & 1+\widehat{\eta}^2\end{pmatrix}.
$$

En utilisant (17a) et (17b), on remarque que le vecteur suivant

$$
W^\varepsilon=\begin{pmatrix}W_0^\varepsilon\\ W_L^\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w^\varepsilon(0,\cdot)\\ w^\varepsilon(L,\cdot)\end{pmatrix}
$$

satisfait l'équation intégrodifferentielle

$$
M*W^\varepsilon=e^{-\nu t}\begin{pmatrix}-g_0\\ g_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\big(W_0^\varepsilon+e^{-\nu t}h_0\big)^-/\varepsilon\\ \big(W_L^\varepsilon+e^{-\nu t}h_L\big)^-/\varepsilon\end{pmatrix}. \tag{24}
$$

Avant de résoudre (24), on cherche à obtenir suffisamment d'informations sur L qui est la convolution inverse de M, dont la transformée de Fourier est

$$
\widehat{L}(\omega)=\frac{1}{(1-\widehat{\eta}^2)\big(\widehat{\lambda}(1+\alpha(\nu+i\omega))\big)}\begin{pmatrix}1+\widehat{\eta}^2 & 2\widehat{\eta}\\ 2\widehat{\eta} & 1+\widehat{\eta}^2\end{pmatrix},
$$

puisque $\widehat{\lambda}(1+\alpha(\nu+i\omega))=(\nu+i\omega)\sqrt{1+\alpha(\nu+i\omega)}$. Par ailleurs, on obtient la transformée de Fourier inverse de $\omega\mapsto(1+\alpha(\nu+i\omega))^{-1/2}$ par une intégration complexe dont le calcul est explicité dans [10]:

$$
\mu(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\omega t}}{1+\alpha(\nu+i\omega)}\,d\omega=\frac{\exp\big(-t(\nu+1/\alpha)\big)}{\sqrt{2\alpha\pi t}}\,1_{\mathbb{R}^+}(t); \tag{25}
$$

alors, μ_1 la transformée de Fourier inverse de $\widehat{\lambda}(1+\alpha(\nu+i\omega))^{-1}$ est la convolution de μ avec $e^{-\nu t}1_{\mathbb{R}^+}$. C'est une fonction continue qui s'annule sur $\mathbb{R}^-$ et de plus

$$
0\le\mu_1(t)=\int_0^t e^{-\nu(t-s)}\mu(s)\,ds\le\sqrt{\alpha\pi}e^{-\nu t}.
$$

Par ailleurs, on remarque que

$$
\frac{1}{1-\widehat{\eta}^2}\begin{pmatrix}1+\widehat{\eta}^2 & 2\widehat{\eta}\\ 2\widehat{\eta} & 1+\widehat{\eta}^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\frac{2\widehat{\eta}}{1-\widehat{\eta}^2}\begin{pmatrix}\widehat{\eta}&1\\1&\widehat{\eta}\end{pmatrix}=\widehat{L}_0(\omega).
$$

Montrons maintenant que η est bornée dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il est clair que

$$
\frac{d^k\widehat{\eta}}{d\omega^k}=\frac{P_k(\omega)\sqrt{1+\alpha(\nu+i\omega)}+Q_k(\omega)}{(1+\alpha(\nu+i\omega))^{m_k}}\,\widehat{\eta},
$$

où P_k et Q_k sont des polynômes en ω et m_k est un nombre entier. Alors, l'estimation (22) implique que les intégrales

$$
\int_{\mathbb{R}}|\omega|^m\Big|\frac{d^k\widehat{\eta}}{d\omega^k}\Big|^2\,d\omega
$$

sont bornées pour tout entier m et k; ceci prouve l'affirmation sur $\widehat{\eta}$. Le théorème de Paley-Wiener implique que η est à support dans $\mathbb{R}^+$.
De plus comme ω tend vers l'infini, $\widehat{\eta}$ tend vers zéro; puisque $1-\widehat{\eta}^2$ ne s'annule jamais, $1-\widehat{\eta}^2$ est bornée autour de 0. Alors la matrice L_0 appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et elle est à support inclus dans $\mathbb{R}^+$. On peut écrire maintenant que

$$L = \mu_1 + \mu_1 * L_0,$$

et biensûr $\mu_1 * L_0$ est une matrice bornée de classe C^∞.
Alors (24) est équivalent à

$$W^\varepsilon = L * \left(e^{-\nu t} \begin{pmatrix} -g_0 \\ g_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(W_0^\varepsilon + e^{-\nu t} h_0\right)^- / \varepsilon \\ \left(W_L^\varepsilon + e^{-\nu t} h_L\right)^- / \varepsilon \end{pmatrix} \right). \tag{26}$$

Il est alors commode de définir

$$g(t) = e^{-\nu t} \begin{pmatrix} -g_0(t) \\ g_L(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(W^\varepsilon, t) = \begin{pmatrix} \left(W_0^\varepsilon + e^{-\nu t} h_0\right)^- \\ \left(W_L^\varepsilon + e^{-\nu t} h_L\right)^- \end{pmatrix}.$$

Si on dote $\mathbb{R}^2$ d'une norme euclidienne, il est évident que

$$|G(W,\cdot) - G(Z,\cdot)| \le |W - Z|. \tag{27}$$

Théorème 3.1 *Soit $Z = \{u \in H^1(Q_T) : u_{xt} \in L^2(Q_T)\}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une unique solution faible $u^\varepsilon \in Z$ au problème* (11)-(12)*; de plus, u^ε possède les propriétés fonctionnelles suivantes:*

$$u^\varepsilon \in L^\infty(0,T; H^2(0,L)), \tag{28a}$$
$$u_t^\varepsilon \in L^2(0,T; H^2(0,L)), \tag{28b}$$
$$u_{tt}^\varepsilon \in L^2(0,T; L^2(0,L)), \tag{28c}$$

et pour presque tout $\tau \in (0,T)$ et pour tout $v \in Z$, l'identité variationnelle suivante est satisfaite:

$$\begin{aligned} &\int_0^L u_t^\varepsilon(\cdot,\tau) v(\cdot,\tau)\, dx - \int_0^L u_1 v(\cdot,0)\, dx - \int_{Q_\tau} u_t^\varepsilon v_t\, dx\, dt + \int_{Q_\tau} u_x^\varepsilon v_x\, dx\, dt \\ &+\alpha \int_{Q_\tau} u_{xt}^\varepsilon v_x\, dx\, dt - \int_0^\tau (m^\varepsilon v)(L,\cdot)\, dt - \int_0^\tau (m^\varepsilon v)(0,\cdot)\, dt = \int_{Q_\tau} f v\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{29}$$

De plus, il existe deux constantes C et C' telles que

$$e^{-\nu t}\big(|u^\varepsilon(0,t) - v(0,t)| + |u^\varepsilon(L,t) - v(L,t)|\big) \le C \exp\big(C' t/\varepsilon\big)$$

Preuve: Dans la preuve on omet le paramètre ε en indice. On réécrit (26) de la manière suivante:

$$W = L * \big(g + G(W,\cdot)/\varepsilon\big). \tag{30}$$

Soit $\mathcal{T}$ tel que

$$(\mathcal{T}W)(t) = L * g + L * G(W,\cdot)/\varepsilon.$$

Soit Λ le maximum de la norme de $L(t)$ sur $[0,T]$, alors on déduit de (27) l'estimation

$$\big|(\mathcal{T}W)(t) - (\mathcal{T}Z)(t)\big| \le \frac{\Lambda}{\varepsilon} \int_0^t \big|W(s) - Z(s)\big|\, ds$$

et grâce aux itérées de Picard, on voit que pour p suffisamment grand, $\mathcal{T}^p$ est une contraction de $C^0\big([0,T];\mathbb{R}^2\big)$ dans lui même. De plus, $L*g$ est de classe C^∞; alors, la méthode standard pour montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz marche et on obtient alors l'estimation suivante:

$$\big|W(t)\big| \leq C\exp\big(\Lambda t/\varepsilon\big).$$

On remarque qu'on peut appliquer les itérations de Picard à (30) pour montrer l'existence d'une solution; il suffit de considérer les itérations:

$$W^0 = 0, \quad W^{n+1} = L * \big(g + G(W^n,\cdot)\big)/\varepsilon,$$

et d'appliquer ensuite les estimations standard. L'unicité est obtenue par des arguments analogues, puisque pour une puissance suffisamment élevée, l'application $\mathcal{T} : W^n \mapsto W^{n+1}$ est une contraction stricte dans l'espace $C^0\big([0,T];\mathbb{R}^2\big)$, car L est bornée dans $[0,T]$. □

4 Estimations sur le problème pénalisé

4.1 Estimations a priori

Lemme 4.1 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, indépendamment de $\varepsilon > 0$, u_t^ε, u_x^ε sont bornées dans $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, u_{xt}^ε est bornée dans $L^2(Q_T)$, $\varepsilon(m^\varepsilon(0,\cdot))^2$ et $\varepsilon(m^\varepsilon(L,\cdot))^2$ sont bornées dans $L^\infty(0,T)$.*

Preuve: Ces estimations sont simplement une application du lemme de Gronwall à l'estimation d'énergie. On multiplie (11) par u_t^ε; puis on intègre l'expression ainsi obtenue sur Q_τ, on obtient

$$\int_{Q_\tau} u_{tt}^\varepsilon u_t^\varepsilon \, dx\, dt - \int_{Q_\tau} u_{xx}^\varepsilon u_t^\varepsilon \, dx\, dt - \alpha \int_{Q_\tau} u_{xxt}^\varepsilon u_t^\varepsilon \, dx\, dt = \int_{Q_\tau} f u_t^\varepsilon \, dx\, dt. \tag{31}$$

On intègre en temps la première intégrale de (31), on intègre par parties en espace la seconde et la troisième intégrales, ensuite les conditions aux limites (12) permettent de déduire que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L \left(|u_t^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2 + |u_x^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2\right) dx + \alpha \int_{Q_\tau} |u_{xt}^\varepsilon|^2 \, dx\, dt - \int_0^\tau (m^\varepsilon u_t^\varepsilon)(L,\cdot)\, dt \\ - \int_0^\tau (m^\varepsilon u_t^\varepsilon)(0,\cdot)\, dt = \int_{Q_\tau} f u_t^\varepsilon \, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^L \left(|u_{0,x}|^2 + |u_1|^2\right) dx.\end{aligned} \tag{32}$$

Par ailleurs, on remarque qu'en $x_0 = 0$ ou $x_0 = L$, on a

$$\int_0^\tau (m^\varepsilon u_t^\varepsilon)(x_0,\cdot)\, dt = -\frac{\varepsilon}{2}\left(m^\varepsilon(x_0,t)\right)^2\Big|_0^\tau. \tag{33}$$

Alors la relation (33) implique que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L \left(|u_t^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2 + |u_x^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2\right) dx + \alpha \int_{Q_\tau} |u_{xt}^\varepsilon|^2 \, dx\, dt + \frac{\varepsilon}{2}\left(m^\varepsilon(0,t)\right)^2\Big|_0^\tau \\ + \frac{\varepsilon}{2}\left(m^\varepsilon(L,t)\right)^2\Big|_0^\tau \leq \int_{Q_\tau} |f u_t^\varepsilon| \, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^L \left(|u_{0,x}|^2 + |u_1|^2\right) dx.\end{aligned} \tag{34}$$

On peut déduire en utilisant un lemme de Gronwall classique que u_t^ε, u_x^ε sont bornées dans $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ et u_{xt}^ε est bornée dans $L^2(Q_T)$, $\varepsilon(m^\varepsilon(0,\cdot))^2$ et $\varepsilon(m^\varepsilon(L,\cdot))^2$ sont bornées dans $L^\infty(0,T)$. □

Remarque 4.2 *Si on suppose que f s'annule lorsque $t > T$ alors u_t^ε et u_x^ε sont bornées dans $L^\infty(0,\infty;L^2(0,L))$ et u_{xt}^ε est bornée dans $L^2(0,\infty;L^2(0,L))$ indépendamment de $\varepsilon > 0$. Ces propriétés s'obtiennent en utilisant le même argument que celui du Lemme 4.1, avec l'origine du temps déplacée en T; il est important de remarquer que l'intégrale contenant f est nulle.*

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, u^ε est bornée dans $C^{0,1/2}(\bar{Q}_T)$ indépendamment de $\varepsilon > 0$.*

Preuve: Soient

$$\rho = 1_{[0,1]} \quad \text{et} \quad \rho_\beta = \frac{1}{\beta}\rho\left(\frac{\cdot}{\beta}\right).$$

Supposons que v appartienne à l'espace de Hölder $C^{0,1/2}$. Si $\beta \in (0,L)$ et $0 \le x \le L-\beta$ alors la fonction

$$v(x) - (\rho_\beta * v)(x) = \frac{1}{\beta}\int_x^{x+\beta} \big(v(x) - v(y)\big)\, dy,$$

peut être estimée de la manière suivante:

$$|v(x) - (\rho_\beta * v)(x)| \le \frac{2}{3}\sqrt{\beta}\, \|v\|_{C^{0,1/2}}. \tag{35}$$

Par ailleurs, si v appartient à $L^2(0,L)$, et v est prolongé par 0 en dehors de $(0,L)$ alors on voit immédiatement que

$$|\rho_\beta * v|_{L^\infty} \le \frac{|v|_{L^2}}{\sqrt{\beta}}. \tag{36}$$

Lorsque $x \in [0, L-\beta]$, on estime $u^\varepsilon(x,t) - u^\varepsilon(x,t')$ par une inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left|u^\varepsilon(\cdot,t) - u^\varepsilon(\cdot,t')\right| &\le \left|u^\varepsilon(\cdot,t) - (\rho_\beta * u^\varepsilon(\cdot,t'))\right| \\ + \left|(\rho_\beta * u^\varepsilon(\cdot,t)) - (\rho_\beta * u^\varepsilon(\cdot,t'))\right| &+ \left|u^\varepsilon(\cdot,t') - (\rho_\beta * u^\varepsilon(\cdot,t'))\right|, \end{aligned}$$

à laquelle on applique (35) et (36); on obtient alors

$$|u^\varepsilon(\cdot,t) - u^\varepsilon(\cdot,t')| \le \frac{4}{3}\sqrt{\beta}|u^\varepsilon|_{L^\infty(0,T;C^{0,1/2}(0,L))} + \frac{1}{\beta}|u^\varepsilon(\cdot,t) - u^\varepsilon(\cdot,t')|.$$

Le Lemme 4.1 permet de déduire que

$$\left|u^\varepsilon(\cdot,t) - u^\varepsilon(\cdot,t')\right| \le C\left(\sqrt{\beta} + \frac{|t'-t|}{\sqrt{\beta}}\right).$$

On obtient une inégalité analogue si $\beta \le x \le L$, en prenant $\rho = 1_{[-1,0]}$. Le choix de $\beta = |t'-t|$ montre que u^ε est Hölder continue en temps avec un exposant $1/2$; la continuité de Hölder en espace est classique. □

Lemme 4.4 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, soit m^ε une suite définie par les relations (14). Alors indépendamment de $\varepsilon > 0$, m^ε est bornée dans $M^1(\Sigma_T)$, l'espace des mesures bornées sur Σ_T.*

Preuve: On intègre (11) sur Q_τ et on obtient en utilisant les conditions aux limites l'identité suivante:

$$\int_0^L u_t^\varepsilon(\cdot,t)\big|_0^\tau\, dx - \int_0^\tau \big(m^\varepsilon(L,\cdot) + m^\varepsilon(0,\cdot)\big)\, dt = \int_{Q_\tau} f\, dx\, dt,$$

il en découle immédiatement que

$$\int_0^\tau \big(m^\varepsilon(L,\cdot)+m^\varepsilon(0,\cdot)\big)\,dt \le \frac{1}{2}\int_0^L \big(|u_t^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2+|u_1|^2\big)\,dx + L + \int_{Q_\tau} |f|\,dx\,dt.$$

Etant donné que $f\in L^2(Q_T)$, $u_1\in L^2(0,L)$ et u_t^ε est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, et m^ε est non négative, on en déduit le lemme. □

Lemme 4.5 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, u_{xx}^ε est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ indépendamment de $\varepsilon>0$.*

Preuve: Encore une fois, on utilise des techniques d'énergie mais maintenant on multiplie la relation (11) par u_{xx}^ε puis on intègre sur Q_τ;

$$\int_{Q_\tau} u_{tt}^\varepsilon u_{xx}^\varepsilon\,dx\,dt - \int_{Q_\tau} |u_{xx}^\varepsilon|^2\,dx\,dt - \alpha\int_{Q_\tau} u_{xxt}^\varepsilon\, u_{xx}^\varepsilon\,dx\,dt = \int_{Q_\tau} f u_{xx}^\varepsilon\,dx\,dt. \tag{37}$$

On intègre par parties la première intégrale de (37) en espace puis en temps, on observe que la troisième intégrale de (37) est une dérivée totale par rapport au temps, on a alors

$$\begin{aligned}\int_0^L \big((u_t^\varepsilon\, u_{xx}^\varepsilon)(\cdot,t)\big)\big|_0^\tau dx - \int_0^\tau \big((u_t^\varepsilon u_{xt}^\varepsilon)(x,t)\big)\big|_0^L dt + \int_{Q_\tau}|u_{xt}^\varepsilon|^2\,dx\,dt \\ - \int_{Q_\tau}|u_{xx}^\varepsilon|^2\,dx\,dt - \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_{xx}^\varepsilon(\cdot,t)|^2\big|_0^\tau\,dx = \int_{Q_\tau} f u_{xx}^\varepsilon\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{38}$$

En utilisant les conditions aux limites (12), (38) devient

$$\begin{aligned}\int_{Q_\tau}|u_{xx}^\varepsilon|^2\,dx\,dt + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_{xx}^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2\,dx = \frac{\varepsilon}{2\alpha}\,|m^\varepsilon(0,t)|^2\big|_0^\tau + \frac{\varepsilon}{2\alpha}\,|m^\varepsilon(L,t)|^2\big|_0^\tau \\ +\frac{1}{\alpha}\int_0^\tau \big(u_t^\varepsilon u_x^\varepsilon\big)(L,\cdot)\,dt - \frac{1}{\alpha}\int_0^\tau \big(u_t^\varepsilon u_x^\varepsilon\big)(0,\cdot)\,dt + \int_0^L \big(u_t^\varepsilon u_{xx}^\varepsilon\big)(\cdot,\tau)\,dx \\ - \int_{Q_\tau} f u_{xx}^\varepsilon\,dx\,dt - \int_0^L u_1 u_{0,xx}\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_{0,xx}|^2\,dx + \int_{Q_\tau}|u_{xt}^\varepsilon|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

On estime ensuite les intégrales aux bords en $x=0$ et $x=L$. Puisque u_t^ε et u_{xt}^ε sont bornées dans $L^2(Q_\tau)$, il en découle que

$$\int_0^\tau \big(|u_t^\varepsilon(0,\cdot)|^2+|u_t^\varepsilon(L,\cdot)|^2\big)\,dt \le C\left(\|u_t^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \|u_{xt}^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)}\right), \tag{39}$$

et de manière analogue on montre que

$$\int_0^\tau \big(|u_x^\varepsilon(0,\cdot)|^2+|u_x^\varepsilon(L,\cdot)|^2\big)\,dt \le C\left(\|u_x^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \|u_{xx}^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)}\right). \tag{40}$$

On approche le produit $|zy|$ par $|z|^2/2\gamma_i + \gamma_i|y|^2/2$, en choisissant différentes valeurs de $\gamma_i>0$, $i=1,2,3$, dans les différents termes, on obtient l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}\int_{Q_\tau}|u_{xx}^\varepsilon|^2\,dx\,dt + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_{xx}^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2\,dx \le \frac{\varepsilon}{2\alpha}\big((m^\varepsilon(0,t))^2+(m^\varepsilon(L,t))^2\big)\big|_0^\tau \\ + \frac{C\gamma_3}{2\alpha}\,\|u_{xx}^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^L |u_{xx}^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2\,dx + \frac{\gamma_2}{2}\int_{Q_\tau}|u_{xx}^\varepsilon|^2\,dx\,dt + E,\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
E =& \frac{C\gamma_3}{2\alpha}\,\|u_x^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{C}{2\alpha\gamma_3}\left(\|u_t^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)} + \|u_{xt}^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\tau)}\right) + \frac{1}{2\gamma_1}\int_0^L |u_t^\varepsilon(x,\tau)|^2\,dx \\
&+ \frac{1}{2\gamma_2}\int_{Q_\tau}|f|^2\,dx\,dt + \int_0^L |u_1 u_{0,xx}|\,dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_{0,xx}|^2\,dx + \int_{Q_\tau}|u_{xt}^\varepsilon|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

On choisit $\gamma_i > 0$ tels que $\alpha > \gamma_1$ et $\alpha > C\gamma_3/(2-\gamma_2)$, par conséquent on obtient

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{C\gamma_3}{2\alpha}\right)\int_{Q_\tau}|u_{xx}^\varepsilon|^2\,dx\,dt + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma_1}{2}\right)\int_0^L |u_{xx}^\varepsilon(\cdot,\tau)|^2\,dx \\
\leq \frac{\varepsilon}{2\alpha}\left((m^\varepsilon(0,t))^2 + (m^\varepsilon(L,t))^2\right)\Big|_0^\tau + E;
\end{aligned}
\tag{41}
$$

étant donné que f est bornée dans $L^2(Q_T)$, on déduit le lemme en utilisant le Lemme 4.1. □

Remarque 4.6 *Si on suppose que f s'annule lorsque $t > T$ alors indépendamment de $\varepsilon > 0$, u_{xx}^ε est bornée dans $L^2(0,\infty;L^2(0,L))$. Ces propriétés se démontrent en utilisant un argument analogue à celui de la Remarque 4.2.*

Remarque 4.7 *Les Lemmes 4.1 et 4.5 permettent de déduire que u_x^ε est bornée dans $H^1(Q_T)$. Soit $u_x^\varepsilon\big|_{\Sigma_T}$ la trace de u_x^ε sur Σ_T. Puisque $u_x^\varepsilon\big|_{\Sigma_T}$ est bornée dans $H^{1/2}(\Sigma_T)$, on peut extraire une sous-suite que l'on note encore $u_x^\varepsilon\big|_{\Sigma_T}$ telle que*

$$
u_x^\varepsilon\big|_{\Sigma_T} \rightharpoonup u_x\big|_{\Sigma_T} \text{ faible dans } H^{1/2}(\Sigma_T).
$$

4.2 Estimations intérieures

On effectue ici des estimations intérieures.

Lemme 4.8 *Sous les hypothèse du Théorème 2.1, pour tout $\beta \in (0, L/2)$, u_{tt}^ε et u_{xxt}^ε sont bornées dans $L^2(0,T;L^2(\beta, L-\beta))$, indépendamment de $\varepsilon > 0$.*

Preuve: On commence par multiplier u^ε par une fonction de troncature $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, et on définit $v^\varepsilon = \omega u^\varepsilon$; ensuite on remarque que $w^\varepsilon = v_t^\varepsilon$ est solution de l'équation de la chaleur, dont le membre de droite peut être estimé grâce aux lemmes donnés ci-dessus.
La fonction de troncature est définie de la manière suivante:

$$
\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta \leq x \leq L-\beta, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq \beta/2 \quad \text{ou} \quad x \geq L - \beta/2. \end{cases}
\tag{42}
$$

Soit

$$
v^\varepsilon(\cdot,t) = \omega u^\varepsilon(\cdot,t).
\tag{43}
$$

Les dérivées de v^ε sont

$$
\begin{aligned}
&v_{tt}^\varepsilon(\cdot,t) = \omega u_{tt}^\varepsilon(\cdot,t),\\
&v_{xx}^\varepsilon(\cdot,t) = \omega u_{xx}^\varepsilon(\cdot,t) + 2\,\omega_x u_x^\varepsilon(\cdot,t) + \omega_{xx}u^\varepsilon(\cdot,t),\\
&v_{xxt}^\varepsilon(\cdot,t) = \omega u_{xxt}^\varepsilon(\cdot,t) + 2\,\omega_x u_{xt}^\varepsilon(\cdot,t) + \omega_{xx}u_t^\varepsilon(\cdot,t).
\end{aligned}
$$

Les relations ci-dessus ainsi que (11) permettent de déduire que v^ε satisfait

$$
v_{tt}^\varepsilon - v_{xx}^\varepsilon - \alpha\, v_{xxt}^\varepsilon = \widetilde{g}^{\,\varepsilon},
\tag{44}
$$

où

$$\widetilde{g}^{\,\varepsilon} = \omega f - 2\,\omega_x\big(u^\varepsilon_x + \alpha\, u^\varepsilon_{xt}\big) - \omega_{xx}\big(u^\varepsilon + \,\alpha u^\varepsilon_t\big).$$

Dans les Lemmes 4.1 et 4.3, nous avons montré que u^ε_t, u^ε_x, u^ε_{xt} sont bornées dans $L^2(Q_T)$, u^ε est bornée dans $C^{0,1/2}(\bar{Q}_T)$; puisque f appartient à $L^2(Q_T)$, il en découle que $\widetilde{g}^{\,\varepsilon}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}\times(0,T))$. Soit

$$w^\varepsilon = v^\varepsilon_t \quad \text{et} \quad g^\varepsilon = \widetilde{g}^{\,\varepsilon} + v^\varepsilon_{xx}. \tag{45}$$

En utilisant (45) dans (44), on obtient

$$w^\varepsilon_t - \alpha\, w^\varepsilon_{xx} = g^\varepsilon. \tag{46}$$

Etant donné que v^ε_{xx} et $\widetilde{g}^\varepsilon$ sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}\times(0,T))$, g^ε est bornée dans $L^2\big(\mathbb{R}\times(0,T)\big)$. Montrons maintenant que w^ε_t est bornée dans $L^2(\mathbb{R}\times(0,T))$. Tout d'abord, on commence par multiplier (46) par w^ε_t puis on intègre le résultat ainsi obtenu sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_t|^2\,dx - \alpha \int_{\mathbb{R}} w^\varepsilon_t\, w^\varepsilon_{xx}\,dx = \int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon\, w^\varepsilon_t\,dx.$$

On intègre par parties le second terme du membre de gauche; puisque $\omega \in C^\infty_0(\mathbb{R})$, il en découle que $w^\varepsilon_t w^\varepsilon_x$ s'annule lorsque x tend vers l'infini et on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_t|^2\,dx + \alpha \int_{\mathbb{R}} w^\varepsilon_{xt}\, w^\varepsilon_x\,dx = \int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon\, w^\varepsilon_t\,dx. \tag{47}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon\, w^\varepsilon_t\,dx \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |g^\varepsilon|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_t|^2\,dx. \tag{48}$$

En utilisant (48) dans (47) puis en intégrant le résultat ainsi obtenu sur $(0,\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_t|^2\,dx\,dt + \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_x(\cdot,\tau)|^2\,dx - \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_x(\cdot,0)|^2\,dx \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |g^\varepsilon|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_t|^2\,dx\,dt,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}&\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_t|^2\,dx\,dt + \alpha \int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_x(\cdot,\tau)|^2\,dx \\ &\le \alpha \int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_x(\cdot,0)|^2\,dx + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |g^\varepsilon|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{49}$$

Puisque

$$w^\varepsilon_x(\cdot,0) = \omega_x u_1 + \omega u_{1,x}, \tag{50}$$

u_1 appartient à $H^1(0,L)$ et ω appartient à $C^\infty_0(\mathbb{R})$, la relation (50) implique que $w^\varepsilon_x(\cdot,0) \in L^2(\mathbb{R})$. Etant donné que g^ε appartient à $L^2(\mathbb{R}\times(0,T))$, alors le membre de gauche de (49) est borné. Alors on déduit de (43) et (45) que u^ε_{tt} est bornée dans $L^2((\beta, L-\beta)\times(0,T))$ indépendamment de ε.
On utilise un raisonnement analogue pour montrer que u^ε_{xxt} est borné dans $L^2((\beta,L-\beta)\times(0,T))$: on multiplie (46) par w^ε_{xx}, puis on intègre sur Q_τ puis en utilisant une intégration par parties, on obtient

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_x(\cdot,t)|^2 \,\Big|_0^\tau\, dx - \alpha \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |w^\varepsilon_{xx}|^2\,dx\,dt = \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon w^\varepsilon_{xx}\,dx\,dt. \tag{51}$$

Ensuite on remarque que $yz \leq y^2/2\gamma + \gamma z^2/2$ où $\gamma \in (0, 2\alpha)$ et on obtient

$$\left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |w_{xx}^\varepsilon|^2 \, dx \, dt \leq \frac{1}{2\gamma} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |g^\varepsilon|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |w_x^\varepsilon(\cdot, 0)|^2 \, dx.$$

Puisque g^ε et $w_x^\varepsilon(\cdot, 0)$ sont bornées dans $L^2(\mathbb{R})$ alors on déduit de l'inégalité ci-dessus que w_{xx}^ε est bornée dans $L^2(\mathbb{R} \times (0,T))$. Alors les identités (43) et (45) impliquent que u_{xxt}^ε est bornée dans $L^2(0,T; L^2(\beta, L-\beta))$. $\square$

Remarque 4.9 *Si on dérive* (44) *par rapport à t puis on multiplie le résultat ainsi obtenu par v_{tt}^ε et on intègre sur $(0,\tau) \times \mathbb{R}$, on déduit que pour tout $\beta \in (0, L/2)$, u_{xtt}^ε est bornée dans $L^2(0,T; L^2(\beta, L-\beta))$, indépendamment de ε.*

5 Passage à la limite dans la formulation variationnelle

Les lemmes établis dans le paragraphe précédent permettent de passer à la limite dans la formulation variationnelle associée au problème pénalisé et de déduire l'existence d'une solution au problème (1)-(4b). On commence par remplacer $v - u^\varepsilon$ par v dans (29), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^L \big(u_t^\varepsilon\big(v-u^\varepsilon\big)\big)(\cdot,t)\big|_0^\tau \, dx - \int_{Q_\tau} u_t^\varepsilon\big(v_t - u_t^\varepsilon\big)\, dx\, dt \\ &+ \int_{Q_\tau} \big(u_x^\varepsilon + \alpha u_{xt}^\varepsilon\big)\big(v_x - u_x^\varepsilon\big) dx\, dt - \int_0^\tau \big(m^\varepsilon\big(v-u^\varepsilon\big)\big)(L,\cdot)\, dt \\ &- \int_0^\tau \big(m^\varepsilon\big(v-u^\varepsilon\big)\big)(0,\cdot)\, dt = \int_{Q_\tau} f\big(v-u^\varepsilon\big)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{52}$$

Lemme 5.1 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, soit u^ε la solution de* (11)-(12). *Il existe une sous-suite, encore notée u^ε, telle que*

$$u^\varepsilon \to u \;\; \textit{dans} \; C^{0,1/2}(\bar{Q}_T), \tag{53a}$$
$$u_t^\varepsilon \rightharpoonup u_t \;\; \textit{faible} \; * \;\; \textit{dans} \; L^\infty(0,T; L^2(0,L)), \tag{53b}$$
$$u_x^\varepsilon \to u_x \;\; \textit{dans} \; L^2(Q_T), \tag{53c}$$
$$u_{xx}^\varepsilon \rightharpoonup u_{xx} \;\; \textit{faible} \; * \;\; \textit{dans} \; L^\infty(0,T; L^2(0,L)), \tag{53d}$$
$$u_{xt}^\varepsilon \rightharpoonup u_{xt} \;\; \textit{faible} \; * \;\; \textit{dans} \; L^2(Q_T), \tag{53e}$$
$$m^\varepsilon \rightharpoonup m \;\; \textit{faible} \; * \;\; \textit{dans} \; M^1(\Sigma_T). \tag{53f}$$

De plus le support de m, noté par $\operatorname{supp} m$ *est inclus dans l'ensemble suivant:*

$$\{t \in \mathbb{R}^+ : u(0,\cdot) = -a_0, \, u(L,\cdot) = -a_L\}.$$

Preuve: Le Lemme 5.1 est une conséquence immédiate des Lemmes 4.1-4.4. En effet, puisque u^ε, u_t^ε, u_{xx}^ε, u_{xt}^ε et m^ε sont bornées dans les espaces fonctionnels explicités dans les Lemmes 4.1-4.4 alors on peut extraire des sous-suites, encore notées u^ε, u_t^ε, u_{xx}^ε, u_{xt}^ε et m^ε, qui convergent comme dans (53). Par ailleurs, u_{xt}^ε est bornée dans $L^2(Q_T)$ et u_{xx}^ε est bornée dans $L^\infty(0,T; L^2(0,L))$ alors en utilisant les injections de Sobolev, on déduit qu'on peut extraire une sous-suite, encore notée u_x^ε, telle que u_x^ε converge fortement vers u_x dans $L^2(Q_T)$. $\square$

La convergence de u_t est obtenue en utilisant les estimations intérieures (Lemme 4.8).

Lemme 5.2 *Sous les hypothèse du Théorème 2.1. Alors u_t^ε converge fortement vers sa limite dans $L^2(Q_T)$.*

Preuve: Soit $y = |u_t^\varepsilon - u_t|^2$. Pour tout $\beta > 0$, on a

$$\int_{Q_T} y\,dx\,dt = \int_0^T \left(\int_0^\beta y\,dx + \int_\beta^{L-\beta} y\,dx + \int_{L-\beta}^L y\,dx \right) dt. \tag{54}$$

Puisque u_t^ε est bornée dans l'espace de Sobolev $H^1(0, L; L^2(0,T))$, u_t^ε est bornée dans l'espace $C^{0,1/2}(0, L; L^2(0,T))$. On note par C le maximum de $|u_t^\varepsilon(x,\cdot)|_{L^2(0,T)}$ par rapport à x; une inégalité de Cauchy-Schwarz permet de déduire que

$$\int_0^T \int_0^\beta |u_t^\varepsilon|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{L-\beta}^L |u_t^\varepsilon|^2\,dx\,dt \le 2C^2\beta. \tag{55}$$

Soit C le maximum de $|u_t(x,\cdot)|_{L^2(0,T)}$,

$$\int_0^T \int_0^\beta |u_t|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{L-\beta}^L |u_t|^2\,dx\,dt \le 2C^2\beta. \tag{56}$$

Soit γ un nombre positif. On choisit β tel que $8C^2\beta \le \gamma/2$. Le Lemme 4.8 implique que u_t^ε est bornée dans $H^1\big([\beta, L-\beta] \times [0,T]\big)$ alors on peut extraire une sous-suite telle que la restriction de u_t^ε à $[\beta, L-\beta] \times [0,T]$ converge fortement vers u_t; en particulier, pour γ suffisamment petit,

$$\int_0^T \int_\beta^{L-\beta} |u_t^\varepsilon - u_t|^2\,dx\,dt \le \frac{\gamma}{2}. \tag{57}$$

En utilisant (55)-(57) dans (54), on déduit le Lemme. □

Théorème 5.3 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, le problème* (1)-(4b) *possède une solution faible u telle que u est $C^{0,1/2}(\bar{Q}_T)$, u_x et u_t sont bornées dans $L^\infty(0,T; L^2(0,L))$, u_{xx} est bornée dans $L^2(Q_T)$.*

Preuve: On passe à la limite dans (52) lorsque ε tend vers zéro. Puisque pour tout $(r,s) \in \mathbb{R}^2$, $(s^- - r^-)(r-s) \ge 0$, si on prend $s = u^\varepsilon(0,\cdot) + a_0$ et $r = v(0,\cdot) + a_0$, on déduit que

$$\begin{aligned} &\big(v(0,\cdot)+a_0\big)\big(v(0,\cdot)+a_0\big)^- - \big(u^\varepsilon(0,\cdot)+a_0\big)\big(v(0,\cdot)+a_0\big)^- \\ &\le \big(v(0,\cdot)+a_0\big)\big(u^\varepsilon(0,\cdot)+a_0\big)^- - \big(u^\varepsilon(0,\cdot)+a_0\big)\big(u^\varepsilon(0,\cdot)+a_0\big)^-. \end{aligned} \tag{58}$$

Puisque $v(0,\cdot) \ge -a_0$ pour tout $t \in [0,\tau]$, le membre de gauche de l'inégalité (58) s'annule. Par ailleurs, le membre de droite (58) est égal à $\big(m^\varepsilon\big(v-u^\varepsilon\big)\big)(0,\cdot)$ ce qui nous conduit à l'inégalité suivante:

$$\int_0^\tau \big(m^\varepsilon\big(v-u^\varepsilon\big)\big)(0,\cdot)\,dt \ge 0. \tag{59}$$

On a une inégalité analogue en $x = L$

$$\int_0^\tau \big(m^\varepsilon\big(v-u^\varepsilon\big)\big)(L,\cdot)\,dt \ge 0. \tag{60}$$

Les inégalités (59), (60), les Lemmes 5.1 et 5.2 permettent de passer à la limite dans la formulation variationnelle (52), on obtient alors (5), ce qui démontre le théorème. □

Remarque 5.4 *L'unicité reste un problème ouvert.*

6 Les traces

Nous avons montré dans 3.1 l'existence d'une solution u^ε de (29) telle que

$$e^{-\nu t}\big(|u^\varepsilon(0,t)-v(0,t)|+|u^\varepsilon(L,t)-v(L,t)|\big)\le C\exp\big(C't/\varepsilon\big)$$

et C' est le maximum de la norme de la matrice $\|L(t)\|$ sur $\mathbb{R}$; cette matrice dépend de ν comme C et C' . Soient $\nu'>0$ et

$$\nu=\nu'+\frac{C'(\nu')}{\varepsilon}+1;$$

alors $e^{-\nu t}\big(|u^\varepsilon(0,t)-v(0,t)|+|u^\varepsilon(L,t)-v(L,t)|\big)$ est une distribution tempérée. Supposons que f soit à support compact en t; alors on déduit de la Remarque 4.2 que les traces $u^\varepsilon_t(0,\cdot)$ et $u^\varepsilon_t(L,\cdot)$ sont bornées dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$, et donc $W^\varepsilon_{0,t}=e^{-\nu t}\big(u^\varepsilon_t(0,t)-\nu u^\varepsilon(0,t)\big)$ et $W^\varepsilon_{L,t}=e^{-\nu t}\big(u^\varepsilon_t(L,t)-\nu u^\varepsilon(L,t)\big)$ sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. On voit immédiatement que $t\mapsto G\big(W^\varepsilon(t),t\big)$ est de carré intégrable. On effectue ensuite un produit scalaire de (24) par $W^\varepsilon_t+\nu W^\varepsilon$ puis on intègre sur $\mathbb{R}^+$, ce qui est possible grâce aux considérations données ci-dessus. On remarque que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big(G\big(W^\varepsilon(t),t\big)\big)\cdot\big(W^\varepsilon_t+\nu W^\varepsilon\big)\,dt\\
&=\int_0^\infty \big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)^-\big((\partial_t+\nu)\big(W^\varepsilon_0+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)\big)\,dt\\
&+\int_0^\infty \big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)^-\big(e^{-t(\nu+1)}(u_0(0)+a_0)\big)\,dt\\
&+\int_0^\infty \big(W^\varepsilon_L(t)+e^{-t}(u_0(L)+a_L)\big)^-\big((\partial_t+\nu)\big(W^\varepsilon_L+e^{-t}(u_0(L)+a_L)\big)\big)\,dt\\
&+\int_0^\infty \big(W^\varepsilon_L(t)+e^{-t}(u_0(L)+a_L)\big)^-\big(e^{-t(\nu+1)}(u_0(L)+a_L)\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)^-\big((\partial_t+\nu)\big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)\big)\,dt\\
&\quad=-\frac12\Big(\big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)^-\Big)^2\Big|_{t=0}^{t=\infty}\\
&\quad-\nu\int_0^\infty\Big(\big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)^-\Big)^2\,dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)^-\big(e^{-t(\nu+1)}(u_0(0)+a_0)\big)\,dt\\
&\le\nu\int_0^\infty\Big(\big(W^\varepsilon_0(t)+e^{-t}(u_0(0)+a_0)\big)^-\Big)^2\,dt+\frac{1}{4\nu}\int_0^\infty e^{-2t(\nu+1)}(u_0(0)+a_0)^2\,dt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^\infty \big(G\big(W^\varepsilon(t),t\big)\big)\cdot\big(W^\varepsilon_t+\nu W^\varepsilon\big)\,dt\le\frac{1}{8\nu(\nu+1)}\big((u_0(0)+a_0)^2+(u_0(L)+a_L)^2\big).$$

On applique l'identité de Plancherel au terme qui contient $M*W^\varepsilon$ dans (24):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (M*W^\varepsilon)\cdot\big((\partial_t+\nu)W^\varepsilon\big)\,dt&=\frac{1}{2\pi}\Re\int_{\mathbb{R}}|\nu+i\omega|^2\sqrt{1+\alpha(\nu+i\omega)}\big|\widehat{W}^\varepsilon(\omega)\big|^2\,d\omega\\
&+\frac{1}{2\pi}\Re\int_{\mathbb{R}}|\nu+i\omega|^2\sqrt{1+\alpha(\nu+i\omega)}\big(\widehat{W}^\varepsilon\big)^*(\omega)\widehat{M}_0(\omega)\widehat{W}^\varepsilon(\omega)\,d\omega
\end{aligned}$$

où $\widehat{M_0}$ est défini de la manière suivante:

$$\widehat{M_0}(\omega) = \frac{2\widehat{\eta}}{1-\widehat{\eta}^2}\begin{pmatrix} \widehat{\eta} & -1 \\ -1 & \widehat{\eta} \end{pmatrix}.$$

En particulier une conséquence de (21) est que la norme de la matrice

$$|\nu + i\omega|^2\sqrt{1+\alpha(\nu+i\omega)}\widehat{M_0}(\omega)$$

est bornée indépendamment de $\omega \in \mathbb{R}$ et $\nu \geq 1$; soit γ la borne supérieure de cette quantité. Pour $\nu \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\Re\sqrt{1+\alpha(\nu+i\omega)} \geq C_0\big(1+\sqrt{\nu}+\sqrt{|\omega|}\big),$$

alors on déduit en utilisant l'inégalité classique $|ab| \leq |a|^2/2 + |b|^2/2$ que

$$\begin{aligned} &\frac{C_0}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big(\big(1+\sqrt{\nu}+\sqrt{|\omega|}\big)|\nu+i\omega|^2\big|\widehat{W}^\varepsilon(\omega)\big|^2\Big)\,d\omega \\ &\leq \frac{\gamma}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\big|\widehat{W}^\varepsilon(\omega)\big|^2\,d\omega + \frac{1}{\gamma\nu(\nu+1)}\big((u_0(0)+a_0)^2+(u_0(L)+a_L)^2\big) \\ &\quad + \frac{C_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big(\big(1+\sqrt{\nu}+\sqrt{|\omega|}\big)|\nu+i\omega|^2\big|\widehat{W}^\varepsilon(\omega)\big|^2\Big)\,d\omega \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{g}(\omega)|^2}{C_0\big(1+\sqrt{\nu}+\sqrt{|\omega|}\big)}, \end{aligned} \tag{61}$$

ce qui implique immédiatement une borne sur la norme L^2 de W^ε indépendamment de ε et de $\nu \geq 1$, puisque W^ε est bornée dans $L^2(0,\infty)^2$ grâce à la Remarque 4.2. Il reste à montrer (61) pour tout $\nu \geq 1$. Soit φ_T une fonction C^∞ qui est égale à 1 lorsque $t \leq T$ et à 0 lorsque $t \geq T + 2/\nu$ et dont le gradient est au plus égal à ν sur $[T, T+2\nu]$, le problème approché

$$M * W^{\varepsilon,T} = g + \varphi_T G\big(W^{\varepsilon,T},\cdot\big)/\varepsilon,$$

possède une solution pour la même raison que le problème limite possède une unique solution. La fonction $W^{\varepsilon,T}$ est à décroissance rapide lorsque t tend vers infini. La modification dans l'estimation (61) est simple et on montre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\big(1+\sqrt{\nu}+\sqrt{|\omega|}\big)|\nu+i\omega|^2\big|\widehat{W}^{\varepsilon,T}\big|^2\,d\omega$$

est bornée indépendamment de ε, T et ν. On passe à la limite lorsque $T \to \infty$, et on obtient la conclusion en utilisant l'unicité de la solution de (30).

Théorème 6.1 *Sous les hypothèses de Théorème 2.1, pour tout $\nu \geq 1$, W^ε est bornée dans $H^{5/4}(\mathbb{R})^2$ et on peut extraire une sous-suite telle que $u^\varepsilon\big|_{\Sigma_T}$ converge vers $u\big|_{\Sigma_T}$ faiblement dans $H^{5/4}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, et $\big(u^\varepsilon_x + \alpha u^\varepsilon_{xt}\big)\big|_{\Sigma_T}$ converge vers $(u_x+\alpha u_{xt})\big|_{\Sigma_T}$ faiblement dans $H^{-1/4}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Alors, u est une solution forte de (1)-(4).*

Preuve: On obtient une solution forte de (1)-(4), en prenant des limites faibles dans des espaces fonctionnels appropriés et en appliquant les méthodes standard. Puisque la démonstration est classique, la vérification est laissée au lecteur. □

Remarque 6.2 *La solution est forte car toutes les traces sont définies.*

Remerciements: Nous tenons à remercier H. Attouch et L. Paoli pour leurs conseils éclairés.

Références

[1] L. AMERIO. *On the motion of a string vibrating through a moving ring with a continuously variable diameter.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 62(2):134–142, 1977.

[2] L. AMERIO. *A unilateral problem for a nonlinear vibrating string equation.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 64(1):8–21, 1978.

[3] L. AMERIO ET G. PROUSE. *Errata corrige: "Study of the motion of a string vibrating against an obstacle".* (Rend. Mat. (6) **8** (1975), no. 2, 563–585). Rend. Mat. (6), 8(3):843, 1975.

[4] L. AMERIO ET G. PROUSE. *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle.* Rend. Mat. (6), 8(2):563–585, 1975. Collection of articles dedicated to Mauro Picone on the occasion of his ninetieth birthday, II.

[5] C. CITRINI. *The motion of a vibrating string in the presence of a point-shaped obstacle.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 52:353–362 (1985), 1982.

[6] C. CITRINI ET C. MARCHIONNA. *On the problem of the point shaped obstacle for the vibrating string equation* $cmy = f(x, t, y, y_x, y_t)$. Rend. Accad. Naz Sci. XL Mem. Mat., 5:53–72, 1981/82.

[7] J. JARUŠEK, J. MÁLEK, J. NEČAS, V. ŠVERÁK. *Variational inequality for a viscous drum vibrating in the presence of an obstacle.* Rend. Mat. Appl. (7), 12(4):943–958 (1993), 1992.

[8] J.U. KIM. *A boundary thin obstacle problem for a wave equation.* Comm. Partial Differential Equations, 14(8-9):1011–1026, 1989.

[9] G. LEBEAU ET M. SCHATZMAN. *A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary.* J. Differential Equations, 53(3):309–361, 1984.

[10] A. PETROV ET M. SCHATZMAN. *A pseudodifferential linear complementarity problem related to a one dimensional viscoelastic model with Signorini conditions.* à paraître dans Arch. Ration. Mech. Anal., 2003.

[11] M. SCHATZMAN. *A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: the vibrating string with a concave obstacle.* J. Math. Anal. Appl., 73(1):138–191, 1980.

[12] M. SCHATZMAN. *Un problème hyperbolique du 2ème ordre avec contrainte unilatérale: la corde vibrante avec obstacle ponctuel.* J. Differential Equations, 36(2):295–334, 1980.