

Un modèle d'écoulement des fluides dans un milieu poreux déformable non saturé

Travail commun avec Bettina Detmann (Albers), Elisabetta Rocca et Jürgen Sprekels

Pavel Krejčí

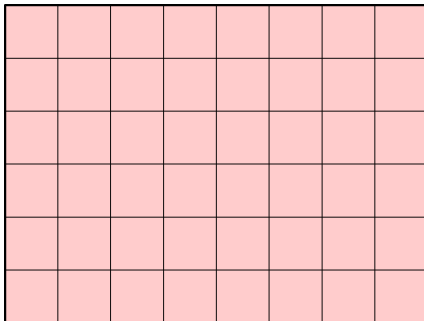
Matematický ústav AV ČR, Praha

INSA Lyon, le 30 novembre 2017

Motivation pratique

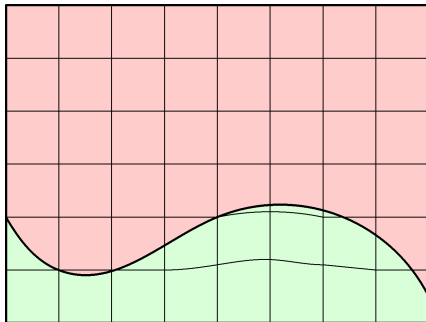
Motivation pratique

Considérons un solide poreux.



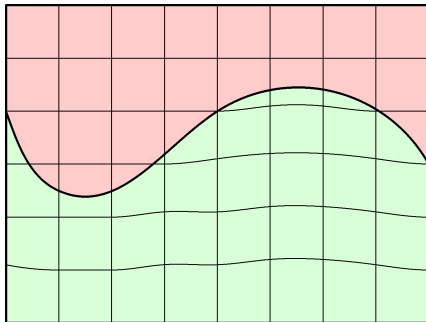
Motivation pratique

Considérons un solide poreux.
L'humidité qui pénètre dans les pores produit une déformation du solide.



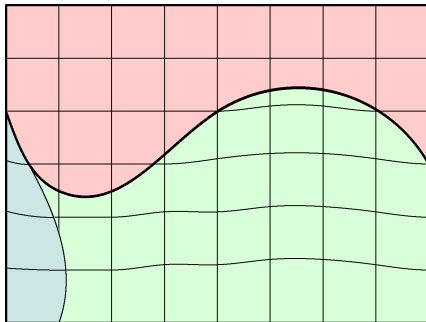
Motivation pratique

Considérons un solide poreux.
L'humidité qui pénètre dans les pores produit une déformation du solide.



Motivation pratique

Considérons un solide poreux.
L'humidité qui pénètre dans les pores produit une déformation du solide.
Solidification

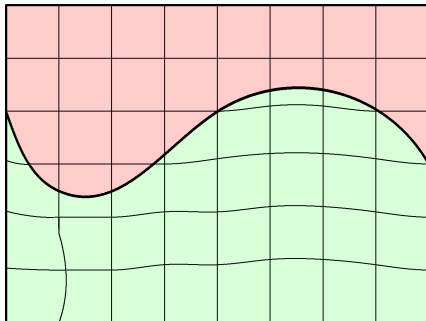


Motivation pratique

Considérons un solide poreux.

L'humidité qui pénètre dans les pores produit une déformation du solide.

Solidification et fusion peuvent produire une déformation encore plus importante.

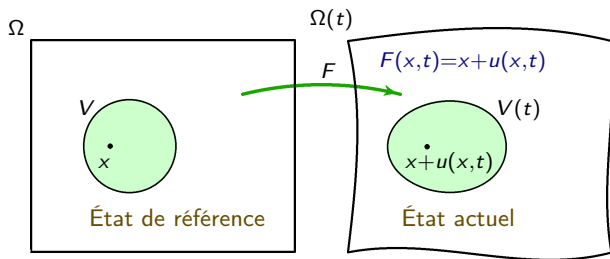


Notation

- $a(x, t) \in [0, 1]$ proportion relative de l'air dans le volume des pores;
 $w(x, t)$ proportion relative de H_2O dans le volume des pores;
 $\chi(x, t) \in [0, 1]$ partie liquide de H_2O ;
 $p(x, t)$ pression capillaire;
 $u(x, t)$ vecteur des déplacements du solide;
 $\varepsilon(x, t)$ tenseur des déformations, $\varepsilon = \nabla_s u := \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$;
 $\sigma(x, t)$ tenseur des contraintes;
 $\theta(x, t)$ température absolue,

où $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné régulier.

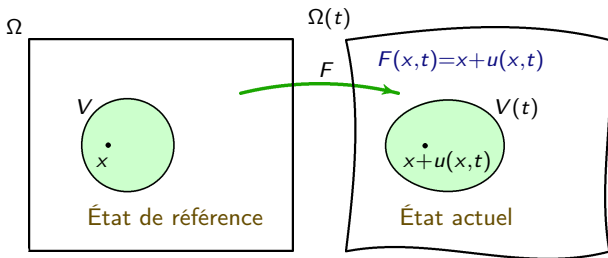
Un solide poreux sous l'hypothèse des petites déformations



Le corps Ω est rempli par le solide, l'eau, la glace, et l'air.

$V \subset \Omega$... sous-domaine arbitraire de référence

Un solide poreux sous l'hypothèse des petites déformations



Le corps Ω est rempli par le solide, l'eau, la glace, et l'air.

$V \subset \Omega$... sous-domaine arbitraire de référence

On désigne par $V_w(t)$, $V_a(t)$ les parties respectives de $V(t)$ occupées par H_2O et l'air. On suppose que la partie $V_s(t) = V(t) \setminus (V_w(t) \cup V_a(t))$ occupée par le solide ne change pas de volume, donc

$$c_s := \frac{|V_s(t)|}{|V|} \in (0, 1)$$

est une constante indépendante du choix de V et de t .

Bilan du volume et de la masse

Soient

$$w(x, t) := \lim_{|V| \rightarrow 0, V \ni x} \frac{|V_w(t)|}{|V|}, \quad a(x, t) := \lim_{|V| \rightarrow 0, V \ni x} \frac{|V_a(t)|}{|V|}.$$

on obtient pour de petites déformations l'équation du bilan des volumes en coordonnées de Lagrange

$$w(x, t) + a(x, t) + c_s = \lim_{|V| \rightarrow 0, V \ni x} \frac{|V(t)|}{|V|} = \det D_x F(x, t) \approx 1 + \operatorname{div} u(x, t).$$

Bilan du volume et de la masse

Soient

$$w(x, t) := \lim_{|V| \rightarrow 0, V \ni x} \frac{|V_w(t)|}{|V|}, \quad a(x, t) := \lim_{|V| \rightarrow 0, V \ni x} \frac{|V_a(t)|}{|V|}.$$

on obtient pour de petites déformations l'équation du bilan des volumes en coordonnées de Lagrange

$$w(x, t) = 1 - c_s - a(x, t) + \operatorname{div} u(x, t).$$

Bilan du volume et de la masse

Soient

$$w(x, t) := \lim_{|V| \rightarrow 0, V \ni x} \frac{|V_w(t)|}{|V|}, \quad a(x, t) := \lim_{|V| \rightarrow 0, V \ni x} \frac{|V_a(t)|}{|V|}.$$

on obtient pour de petites déformations l'équation du bilan des volumes en coordonnées de Lagrange

$$w(x, t) = 1 - c_s - a(x, t) + \operatorname{div} u(x, t).$$

ρ_w masse volumique de l'eau;

ρ_e masse volumique de la glace;

$\chi \in [0, 1]$ partie liquide de H_2O ;

$\int_V \rho_w \chi w \, dx$ masse de l'eau liquide dans V ;

$\int_V \rho_e (1 - \chi) w \, dx$ masse de la glace dans V .

Bilan de masse

Bilan de masse

Soit $n(x)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω au point $x \in \partial\Omega$. La différence entre l'accroissement total de la masse de l'eau dans V et le débit de l'eau vers l'extérieur à travers le bord ∂V de V est égale à la puissance des sources d'eau liquide (positive ou négative) produit par le changement de phase entre l'eau et la glace:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_w \chi w \, dx + \int_{\partial V} \xi \cdot n(x) \, ds(x) = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_e (1 - \chi) w \, dx,$$

où ξ est le **vecteur du débit massique** que l'on suppose être proportionnel au gradient de la pression capillaire conformément à la **loi de Darcy**:

$$\xi = -\mu(p) \nabla p.$$

Bilan de masse

Soit $n(x)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω au point $x \in \partial\Omega$. La différence entre l'accroissement total de la masse de l'eau dans V et le débit de l'eau vers l'extérieur à travers le bord ∂V de V est égale à la puissance des sources d'eau liquide (positive ou négative) produit par le changement de phase entre l'eau et la glace:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_w \chi w \, dx + \int_{\partial V} \xi \cdot n(x) \, ds(x) = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_e (1 - \chi) w \, dx,$$

où ξ est le vecteur du débit massique que l'on suppose être proportionnel au gradient de la pression capillaire conformément à la loi de Darcy:

$$\xi = -\mu(p) \nabla p.$$

Bilan de masse

Soit $n(x)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω au point $x \in \partial\Omega$. La différence entre l'accroissement total de la masse de l'eau dans V et le **débit de l'eau vers l'extérieur** à travers le bord ∂V de V est égale à la puissance des sources d'eau liquide (positive ou négative) produit par le changement de phase entre l'eau et la glace:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_w \chi w \, dx + \int_{\partial V} \xi \cdot n(x) \, ds(x) = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_e (1 - \chi) w \, dx,$$

où ξ est le **vecteur du débit massique** que l'on suppose être proportionnel au gradient de la pression capillaire conformément à la **loi de Darcy**:

$$\xi = -\mu(p) \nabla p.$$

Bilan de masse

Soit $n(x)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω au point $x \in \partial\Omega$. La différence entre l'accroissement total de la masse de l'eau dans V et le débit de l'eau vers l'extérieur à travers le bord ∂V de V est égale à la **puissance des sources d'eau liquide** (positive ou négative) produit par le changement de phase entre l'eau et la glace:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_w \chi w \, dx + \int_{\partial V} \xi \cdot n(x) \, ds(x) = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_e (1 - \chi) w \, dx,$$

où ξ est le **vecteur du débit massique** que l'on suppose être proportionnel au gradient de la pression capillaire conformément à la **loi de Darcy**:

$$\xi = -\mu(p) \nabla p.$$

Bilan de masse

Soit $n(x)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Ω au point $x \in \partial\Omega$. La différence entre l'accroissement total de la masse de l'eau dans V et le débit de l'eau vers l'extérieur à travers le bord ∂V de V est égale à la puissance des sources d'eau liquide (positive ou négative) produit par le changement de phase entre l'eau et la glace:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_w \chi w \, dx + \int_{\partial V} \xi \cdot n(x) \, ds(x) = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_e (1 - \chi) w \, dx,$$

où ξ est le **vecteur du débit massique** que l'on suppose être proportionnel au gradient de la pression capillaire conformément à la **loi de Darcy**:

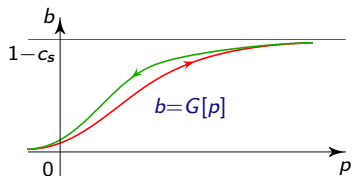
$$\xi = -\mu(p) \nabla p.$$

La forme différentielle du bilan de masse est donc

$$\frac{\partial}{\partial t} ((\chi + \rho^*(1 - \chi))w) - \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p) = 0.$$

Hystérésis capillaire

Hystérésis capillaire

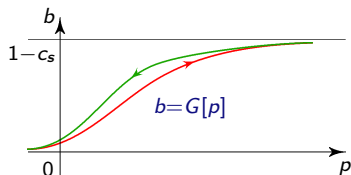


Il existe une relation d'hystérésis de Preisach

$$b := 1 - c_s - a = G[p]$$

entre la pression capillaire et la saturation en air (O'Kane, Flynn 2000-2007)

Hystérésis capillaire



Il existe une relation d'hystérésis de Preisach

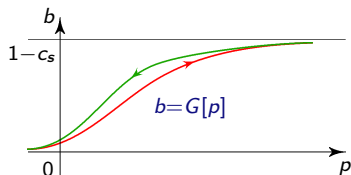
$$b := 1 - c_s - a = G[p]$$

entre la pression capillaire et la saturation en air (O'Kane, Flynn 2000-2007)

L'hystérésis se manifeste par la différence entre les courbes de rétention correspondant à l'assèchement et à l'humectation d'un sol.

Une explication microscopique est fondée sur l'observation que les angles de contact de l'interface entre le liquide et le gaz sur une paroi solide sont différents pendant l'assèchement et l'humectation.

Hystérésis capillaire



Il existe une relation d'hystérésis de Preisach

$$b := 1 - c_s - a = G[p]$$

entre la pression capillaire et la saturation en air (O'Kane, Flynn 2000-2007)

L'hystérésis se manifeste par la différence entre les courbes de rétention correspondant à l'assèchement et à l'humectation d'un sol.

Une explication microscopique est fondée sur l'observation que les angles de contact de l'interface entre le liquide et le gaz sur une paroi solide sont différents pendant l'assèchement et l'humectation.

Utilisant la formule $b = w - \operatorname{div} u$ et posant $\rho^* = \rho_e / \rho_w$, on peut reformuler le bilan de masse sous la forme d'une ÉDP avec l'hystérésis

$$\frac{\partial}{\partial t} ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(G[p] + \operatorname{div} u)) - \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p) = 0.$$

Opérateur de Preisach

Opérateur de Preisach

Étant donnée une fonction $\psi : (r, v) \mapsto \psi(r, v)$ à valeurs positives de deux variables $r \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}$ appelée la **densité de Preisach**, on pose

$$b = G[p]$$

Opérateur de Preisach

Étant donnée une fonction $\psi : (r, v) \mapsto \psi(r, v)$ à valeurs positives de deux variables $r \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}$ appelée la **densité de Preisach**, on pose

$$b = G[p] = \int_0^\infty \int_0^{f_r[p]} \psi(r, v) \, dv \, dr,$$

où $f_r : p \mapsto \xi_r$ est l'opérateur de résolution de l'inéquation variationnelle

$$\dot{\xi}_r(t)(p(t) - \xi_r(t) - y) \geq 0 \text{ p.p. } \forall y \in [-r, r],$$

sous la contrainte $|p - \xi_r| \leq r$ et avec une donnée initiale $\xi_r(0) = \min\{p(0) + r, \max\{0, p(0) - r\}\}$.

Opérateur de Preisach

Étant donnée une fonction $\psi : (r, v) \mapsto \psi(r, v)$ à valeurs positives de deux variables $r \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}$ appelée la **densité de Preisach**, on pose

$$b = G[p] = \int_0^\infty \int_0^{f_r[p]} \psi(r, v) \, dv \, dr,$$

où $f_r : p \mapsto \xi_r$ est l'opérateur de résolution de l'inéquation variationnelle

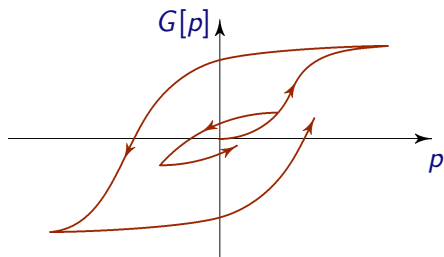
$$\dot{\xi}_r(t)(p(t) - \xi_r(t) - y) \geq 0 \text{ p.p. } \forall y \in [-r, r],$$

sous la contrainte $|p - \xi_r| \leq r$ et avec une donnée initiale $\xi_r(0) = \min\{p(0) + r, \max\{0, p(0) - r\}\}$.

L'application f_r est appelée **l'opérateur de jeu mécanique**.

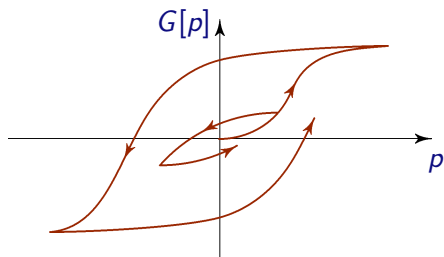
Boucles d'hystérésis typiques

Boucles d'hystérésis typiques

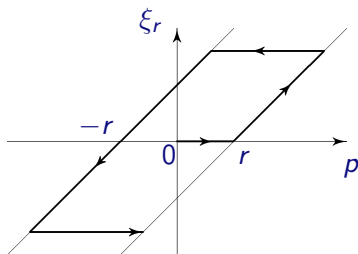


Opérateur de Preisach

Boucles d'hystérésis typiques

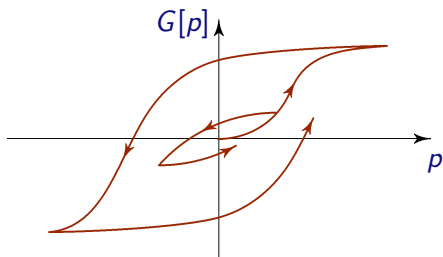


Opérateur de Preisach

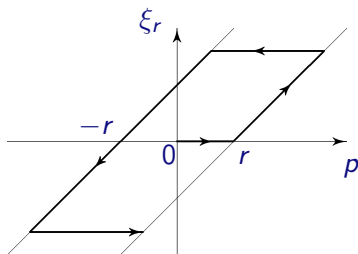


Opérateur de jeu mécanique

Boucles d'hystérésis typiques



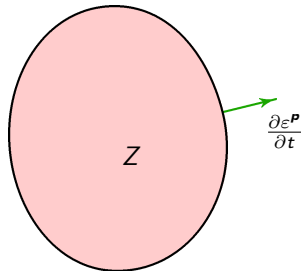
Opérateur de Preisach



Opérateur de jeu mécanique

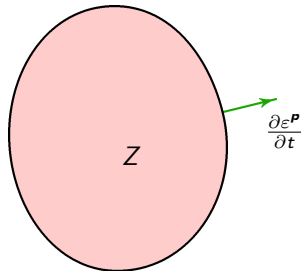
Sous des hypothèses appropriées sur ψ , l'opérateur de Preisach est lipschitzien dans $W^{1,1}(0, T) \rightarrow W^{1,1}(0, T)$ et admet un prolongement lipschitzien dans $C[0, T] \rightarrow C[0, T]$.

Plasticité



On s'imagine qu'il existe un domaine convexe fermé Z dans l'espace \mathbb{T} des tenseurs du second ordre qui représente l'ensemble des valeurs admissibles des tenseurs des contraintes σ . La réaction du corps est élastique tant que σ reste à l'intérieur de Z , **déformations plastiques** ont lieu au bord ∂Z de Z .

Plasticité



On s'imagine qu'il existe un domaine convexe fermé Z dans l'espace \mathbb{T} des tenseurs du second ordre qui représente l'ensemble des valeurs admissibles des tenseurs des contraintes σ . La réaction du corps est élastique tant que σ reste à l'intérieur de Z , **déformations plastiques** ont lieu au bord ∂Z de Z .

La **variable interne** ε^P est appelée **déformation plastique**. Étant donné le tenseur des déformations ε , on définit σ comme la solution de l'inéquation variationnelle de **Prandtl-Reuss**

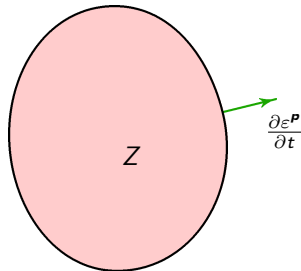
$$A^{-1}\sigma(t) + \varepsilon^P(t) = \varepsilon(t)$$

$$\sigma(t) \in Z$$

$$\frac{\partial \varepsilon^P}{\partial t}(t) : (\sigma(t) - \tilde{\sigma}) \geq 0 \quad p.p. \quad \forall \tilde{\sigma} \in Z,$$

où $:$ est le produit scalaire canonique dans \mathbb{T} .

Plasticité



On s'imagine qu'il existe un domaine convexe fermé Z dans l'espace \mathbb{T} des tenseurs du second ordre qui représente l'ensemble des valeurs admissibles des tenseurs des contraintes σ . La réaction du corps est élastique tant que σ reste à l'intérieur de Z , **déformations plastiques** ont lieu au bord ∂Z de Z .

La **variable interne** ε^P est appelée **déformation plastique**. Étant donné le tenseur des déformations ε , on définit σ comme la solution de l'inéquation variationnelle de **Prandtl-Reuss**

$$A^{-1}\sigma(t) + \varepsilon^P(t) = \varepsilon(t)$$

$$\sigma(t) \in Z$$

$$\frac{\partial \varepsilon^P}{\partial t}(t) : (\sigma(t) - \tilde{\sigma}) \geq 0 \quad p.p. \quad \forall \tilde{\sigma} \in Z,$$

où $:$ est le produit scalaire canonique dans \mathbb{T} . L'opérateur de résolution $P : \varepsilon \mapsto \sigma$ est **continu** dans $W^{1,1}(0, T)$ et dans $C[0, T]$.

Les potentiels d'hystérésis

Les opérateurs d'hystérésis P (élastoplasticité) et G (capillarité) admettent des opérateurs potentiels U_P , U_G et des opérateurs de dissipation D_P , D_G qui vérifient les bilans d'énergie:

Les potentiels d'hystérésis

Les opérateurs d'hystérésis P (élastoplasticité) et G (capillarité) admettent des opérateurs potentiels U_P , U_G et des opérateurs de dissipation D_P , D_G qui vérifient les bilans d'énergie:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : P[\varepsilon] = \frac{\partial}{\partial t} U_P[\varepsilon] + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_*,$$

$$p \frac{\partial}{\partial t} G[p] = \frac{\partial}{\partial t} U_G[p] + \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right|.$$

Le symbole $\| \cdot \|_*$ désigne une semi-norme dans l'espace \mathbb{T} des tenseurs (en fait, c'est la fonctionnelle de Minkowski M_{Z^*} du convexe conjugué Z^* de Z).

Les potentiels d'hystérésis

Les opérateurs d'hystérésis P (élastoplasticité) et G (capillarité) admettent des opérateurs potentiels U_P , U_G et des opérateurs de dissipation D_P , D_G qui vérifient les bilans d'énergie:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : P[\varepsilon] = \frac{\partial}{\partial t} U_P[\varepsilon] + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_*,$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} G[\rho] = \frac{\partial}{\partial t} U_G[\rho] + \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[\rho] \right|.$$

Le symbole $\| \cdot \|_*$ désigne une semi-norme dans l'espace \mathbb{T} des tenseurs (en fait, c'est la fonctionnelle de Minkowski M_{Z^*} du convexe conjugué Z^* de Z).

Les opérateurs ci-dessus sont continus par rapport à la **convergence forte** de leurs entrées dans $L^p(\Omega; C[0, T])$ et **convergence faible** dans $L^q(\Omega \times (0, T))$ de leurs dérivées per rapport au temps.

Les potentiels d'hystérésis II

L'inégalité $\dot{\varepsilon}^P : (\sigma - y) \geq 0$ pour tout $y \in Z$, $\varepsilon^P = \varepsilon - A^{-1}\sigma$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : \sigma - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A^{-1}\sigma : \sigma) = M_{Z^*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon - A^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right),$$

et on peut poser $U_P[\varepsilon] = \frac{1}{2} A^{-1} P[\varepsilon] : P[\varepsilon]$, $D_P[\varepsilon] = \varepsilon - A^{-1} P[\varepsilon]$.

Les potentiels d'hystérésis II

L'inégalité $\dot{\varepsilon}^P : (\sigma - y) \geq 0$ pour tout $y \in Z$, $\varepsilon^P = \varepsilon - A^{-1}\sigma$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : \sigma - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A^{-1}\sigma : \sigma) = M_{Z^*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon - A^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right),$$

et on peut poser $U_P[\varepsilon] = \frac{1}{2} A^{-1} P[\varepsilon] : P[\varepsilon]$, $D_P[\varepsilon] = \varepsilon - A^{-1} P[\varepsilon]$.

De façon analogue, $\frac{\partial}{\partial t} f_r[p](p - f_r[p] - z) \geq 0$ pour tout $|z| \leq r$ implique

$$\psi(r, f_r[p]) p \frac{\partial}{\partial t} f_r[p] - \psi(r, f_r[p]) f_r[p] \frac{\partial}{\partial t} f_r[p] = r \left| \psi(r, f_r[p]) \frac{\partial}{\partial t} f_r[p] \right|,$$

et on choisit

$$U_G[p] = \int_0^\infty \int_0^{f_r[p]} v \psi(r, v) dv dr, \quad D_G[p] = \int_0^\infty r \int_0^{f_r[p]} \psi(r, v) dv dr.$$

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la dilatation thermique,

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la dilatation thermique, avec des constantes physiques θ_c (température de référence donnée), β (coefficient de la dilatation thermique relative), λ (module d'élasticité de l'eau), tenseur des viscosités B , et avec l'opérateur de comportement élastoplastique P :

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la dilatation thermique, avec des constantes physiques θ_c (température de référence donnée), β (coefficient de la dilatation thermique relative), λ (module d'élasticité de l'eau), tenseur des viscosités B , et avec l'opérateur de comportement élastoplastique P :

$$\sigma = P[\varepsilon]$$

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la dilatation thermique, avec des constantes physiques θ_c (température de référence donnée), β (coefficient de la dilatation thermique relative), λ (module d'élasticité de l'eau), tenseur des viscosités B , et avec l'opérateur de comportement élastoplastique P :

$$\sigma = P[\varepsilon] + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la dilatation thermique, avec des constantes physiques θ_c (température de référence donnée), β (coefficient de la dilatation thermique relative), λ (module d'élasticité de l'eau), tenseur des viscosités B , et avec l'opérateur de comportement élastoplastique P :

$$\sigma = P[\varepsilon] + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p))$$

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la **dilatation thermique**, avec des constantes physiques θ_c (température de référence donnée), β (coefficient de la dilatation thermique relative), λ (module d'élasticité de l'eau), tenseur des viscosités B , et avec l'opérateur de comportement élastoplastique P :

$$\sigma = P[\varepsilon] + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p) - \beta(\theta - \theta_c))\delta,$$

où δ est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la dilatation thermique, avec des constantes physiques θ_c (température de référence donnée), β (coefficient de la dilatation thermique relative), λ (module d'élasticité de l'eau), tenseur des viscosités B , et avec l'opérateur de comportement élastoplastique P :

$$\sigma = P[\varepsilon] + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p) - \beta(\theta - \theta_c))\delta,$$

où δ est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Mécanique des milieux poreux déformables

On suppose que le tenseur des contraintes σ consiste de plusieurs composantes qui correspondent à l'élastoplasticité, la viscosité, la capillarité, le changement de phase et à la dilatation thermique, avec des constantes physiques θ_c (température de référence donnée), β (coefficient de la dilatation thermique relative), λ (module d'élasticité de l'eau), tenseur des viscosités B , et avec l'opérateur de comportement élastoplastique P :

$$\sigma = P[\varepsilon] + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p) - \beta(\theta - \theta_c))\delta,$$

où δ est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le mouvement obéit à la relation fondamentale de la dynamique

$$\rho_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma + g,$$

où ρ_S est la masse volumique du solide et g est une force distribuée donnée (la pesanteur, par exemple).

Bilan d'énergie

Le **Premier principe de la Thermodynamique** dit qu'il existe une fonction d'état \mathcal{U} appelée **l'énergie interne** qui est conservée dans tout sous-domaine $V \subset \Omega$ au sens suivant:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{U} dx + \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds(x) = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} dx - \frac{1}{\rho_w} \int_{\partial V} p \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} ds(x),$$

ou bien, en forme différentielle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} - \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (p \mu(p) \nabla p),$$

où \mathbf{q} est le vecteur du **flux de chaleur**.

Bilan d'énergie

Le **Premier principe de la Thermodynamique** dit qu'il existe une fonction d'état \mathcal{U} appelée **l'énergie interne** qui est conservée dans tout sous-domaine $V \subset \Omega$ au sens suivant:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{U} \, dx + \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, ds(x) = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \, dx - \frac{1}{\rho_w} \int_{\partial V} p \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \, ds(x),$$

ou bien, en forme différentielle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} - \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (p \boldsymbol{\mu}(p) \nabla p),$$

où \mathbf{q} est le vecteur du **flux de chaleur**.

Suivant le **Deuxième principe**, il existe une fonction d'état \mathcal{S} appelée **l'entropie** qui est croissante au sens de **l'inégalité de Clausius-Duhem**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \geq 0.$$

Énergie interne et entropie

Le choix minimal de \mathcal{U} et de \mathcal{S} compatible avec les principes de la thermodynamique est, sous l'hypothèse que la capacité thermique volumique c_V et la chaleur latente de fusion de la glace L sont constant,

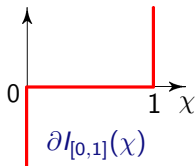
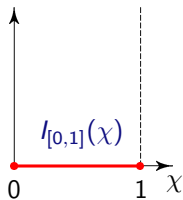
$$\mathcal{U} = U_P[\varepsilon] + (\chi + \rho^*(1 - \chi))(U_G[\rho] + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{div} u)^2) + L\chi + \beta\theta_c \operatorname{div} u + c_V\theta + I_{[0,1]}(\chi),$$

$$\mathcal{S} = \beta \operatorname{div} u + \frac{L}{\theta_c} \chi + c_V \log(\theta/\theta_c),$$

où $I_{[0,1]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$, à condition que la dynamique du changement de phase est modélisée par l'équation

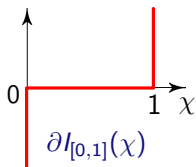
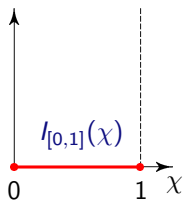
$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} \chi + \partial I_{[0,1]}(\chi) \ni (1 - \rho^*) \left(\rho G[\rho] - U_G[\rho] + \rho \operatorname{div} u - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 \right) + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right).$$

Fonction indicatrice



$$I_{[0,1]}(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \chi \in [0, 1], \\ +\infty & \text{pour } \chi \notin [0, 1], \end{cases} \quad \partial I_{[0,1]}(\chi) = \begin{cases} \{0\} & \text{pour } \chi \in (0, 1), \\ (-\infty, 0] & \text{pour } \chi = 0, \\ [0, +\infty) & \text{pour } \chi = 1, \\ \emptyset & \text{pour } \chi \notin [0, 1], \end{cases}$$

Fonction indicatrice



$$I_{[0,1]}(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \chi \in [0, 1], \\ +\infty & \text{pour } \chi \notin [0, 1], \end{cases} \quad \partial I_{[0,1]}(\chi) = \begin{cases} \{0\} & \text{pour } \chi \in (0, 1), \\ (-\infty, 0] & \text{pour } \chi = 0, \\ [0, +\infty) & \text{pour } \chi = 1, \\ \emptyset & \text{pour } \chi \notin [0, 1], \end{cases}$$

Le second membre $f(t)$ de l'inclusion (équivalente à l'inéquation variationnelle qui définit l'opérateur de jeu mécanique)

$$\gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} + \partial I_{[0,1]}(\chi) \ni f(t)$$

pousse la solution $\chi(t)$ vers 1 si $f(t) > 0$ et vers 0 si $f(t) < 0$.

Production d'entropie

Production d'entropie

La vitesse de la production d'entropie donnée par la partie gauche de l'inégalité de Clausius-Duhem et de la forme

$$\frac{1}{\theta} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* + (\chi + \rho^*(1 - \chi)) \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[\rho] \right| + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \mu(\rho) |\nabla \rho|^2 + \gamma \left| \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|^2 - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \right),$$

et reste toujours positive conformément au Deuxième principe à condition que $\theta > 0$ (le **Principe zéro**) et $\mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0$. C'est certainement le cas si on suppose la **loi de Fourier**

$$\mathbf{q} = -\kappa(\theta) \nabla \theta.$$

Production d'entropie

La vitesse de la production d'entropie donnée par la partie gauche de l'inégalité de Clausius-Duhem et de la forme

$$\frac{1}{\theta} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* + (\chi + \rho^*(1 - \chi)) \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \mu(p) |\nabla p|^2 + \gamma \left| \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|^2 - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \right),$$

et reste toujours positive conformément au Deuxième principe à condition que $\theta > 0$ (le **Principe zéro**) et $\mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0$. C'est certainement le cas si on suppose la **loi de Fourier**

$$\mathbf{q} = -\kappa(\theta) \nabla \theta.$$

La positivité de la température fait partie du problème et **doit être démontrée!**

Système complet d'ÉDP

Pour quatre inconnues p , u , θ , et χ on a quatre équations d'évolution: le bilan de masse, le bilan de la quantité de mouvement, le bilan d'énergie, et la dynamique du changement de phase

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left((\chi + \rho^*(1 - \chi))(G[p] + \operatorname{div} u) \right) &= \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p), \\ \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \operatorname{div} \sigma + g, \\ \sigma &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + P[\nabla_s u] - \beta(\theta - \theta_c) \delta \\ &\quad + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p) \delta, \\ c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} : \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \mu(p) |\nabla p|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* \\ &\quad + (\chi + \rho^*(1 - \chi)) \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + \gamma \left| \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|^2 \\ &\quad - \frac{L}{\theta_c} \theta \frac{\partial \chi}{\partial t} - \beta \theta \operatorname{div} \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} + \partial_{[0,1]}(\chi) &\ni (1 - \rho^*) \left(p G[p] - U_G[p] + p \operatorname{div} u - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 \right) \\ &\quad + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right).\end{aligned}$$

Système complet d'ÉDP

Pour quatre inconnues p , u , θ , et χ on a quatre équations d'évolution: le bilan de masse, le bilan de la quantité de mouvement, le bilan d'énergie, et la dynamique du changement de phase

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\chi + \rho^*(1 - \chi))(G[p] + \operatorname{div} u) \right) = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p),$$

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma + g,$$

$$\begin{aligned} \sigma &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + P[\nabla_s u] - \beta(\theta - \theta_c) \delta \\ &\quad + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p) \delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} : \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \mu(p) |\nabla p|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* \\ &\quad + (\chi + \rho^*(1 - \chi)) \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + \gamma \left| \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|^2 \\ &\quad - \frac{L}{\theta_c} \theta \frac{\partial \chi}{\partial t} - \beta \theta \operatorname{div} \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} + \partial_{[0,1]}(\chi) &\ni (1 - \rho^*) \left(p G[p] - U_G[p] + p \operatorname{div} u - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 \right) \\ &\quad + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right). \end{aligned}$$

Système complet d'ÉDP

Pour quatre inconnues p , u , θ , et χ on a quatre équations d'évolution: le bilan de masse, le bilan de la quantité de mouvement, le bilan d'énergie, et la dynamique du changement de phase

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\chi + \rho^*(1 - \chi))(G[p] + \operatorname{div} u) \right) = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p),$$

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma + g,$$

$$\begin{aligned} \sigma &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + P[\nabla_s u] - \beta(\theta - \theta_c) \delta \\ &\quad + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p) \delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} : \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \mu(p) |\nabla p|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* \\ &\quad + (\chi + \rho^*(1 - \chi)) \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + \gamma \left| \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|^2 \\ &\quad - \frac{L}{\theta_c} \theta \frac{\partial \chi}{\partial t} - \beta \theta \operatorname{div} \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} + \partial_{[0,1]}(\chi) &\ni (1 - \rho^*) \left(\rho G[p] - U_G[p] + \rho \operatorname{div} u - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 \right) \\ &\quad + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right). \end{aligned}$$

Système complet d'ÉDP

Pour quatre inconnues p , u , θ , et χ on a quatre équations d'évolution: le bilan de masse, le bilan de la quantité de mouvement, le bilan d'énergie, et la dynamique du changement de phase

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\chi + \rho^*(1 - \chi))(G[p] + \operatorname{div} u) \right) = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p),$$

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma + g,$$

$$\begin{aligned} \sigma &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + P[\nabla_s u] - \beta(\theta - \theta_c) \delta \\ &\quad + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p)) \delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} : \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \mu(p) |\nabla p|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* \\ &\quad + (\chi + \rho^*(1 - \chi)) \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + \gamma \left| \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|^2 \\ &\quad - \frac{L}{\theta_c} \theta \frac{\partial \chi}{\partial t} - \beta \theta \operatorname{div} \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} + \partial_{[0,1]}(\chi) &\ni (1 - \rho^*) \left(\rho G[p] - U_G[p] + \rho \operatorname{div} u - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 \right) \\ &\quad + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right). \end{aligned}$$

Système complet d'ÉDP

Pour quatre inconnues p , u , θ , et χ on a quatre équations d'évolution: le bilan de masse, le bilan de la quantité de mouvement, le bilan d'énergie, et la **dynamique du changement de phase**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\chi + \rho^*(1 - \chi))(G[p] + \operatorname{div} u) \right) = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p),$$

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma + g,$$

$$\begin{aligned} \sigma &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + P[\nabla_s u] - \beta(\theta - \theta_c) \delta \\ &\quad + ((\chi + \rho^*(1 - \chi))(\lambda \operatorname{div} u - p)) \delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) &= B \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} : \nabla_s \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \mu(p) |\nabla p|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* \\ &\quad + (\chi + \rho^*(1 - \chi)) \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + \gamma \left| \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|^2 \\ &\quad - \frac{L}{\theta_c} \theta \frac{\partial \chi}{\partial t} - \beta \theta \operatorname{div} \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} + \partial_{l[0,1]}(\chi) &\ni (1 - \rho^*) \left(p G[p] - U_G[p] + p \operatorname{div} u - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 \right) \\ &\quad + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right). \end{aligned}$$

Conditions au bord et conditions initiales

Sur $\partial\Omega$ on définit les conditions

$$\begin{aligned}u &= 0, \\ \frac{1}{\rho_w} \mu(p) \nabla p \cdot n &= \alpha(x)(p^* - p), \\ \kappa(\theta) \nabla \theta \cdot n &= \omega(x)(\theta^* - \theta),\end{aligned}$$

où p^* et la pression externe donnée, θ^* et la température externe donnée, $\alpha(x) \geq 0$ est la perméabilité du bord et $\omega(x) \geq 0$ est la conductivité thermique du bord.

On choisit des conditions initiales

$$\begin{aligned}p(x, 0) &= p^0(x), \\ u(x, 0) &= u^0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u^1(x), \\ \theta(x, 0) &= \theta^0(x), \\ \chi(x, 0) &= \chi^0(x).\end{aligned}$$

Conditions au bord et conditions initiales

Sur $\partial\Omega$ on définit les conditions

$$\begin{aligned}u &= 0, \\ \frac{1}{\rho_w} \mu(p) \nabla p \cdot n &= \alpha(x)(p^* - p), \\ \kappa(\theta) \nabla \theta \cdot n &= \omega(x)(\theta^* - \theta),\end{aligned}$$

où p^* et la pression externe donnée, θ^* et la température externe donnée, $\alpha(x) \geq 0$ est la perméabilité du bord et $\omega(x) \geq 0$ est la conductivité thermique du bord.

On choisit des conditions initiales

$$\begin{aligned}p(x, 0) &= p^0(x), \\ u(x, 0) &= u^0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u^1(x), \\ \theta(x, 0) &= \theta^0(x), \\ \chi(x, 0) &= \chi^0(x).\end{aligned}$$

Le travail est en progrès et pour le moment, on a plusieurs **résultats partiels**. La difficulté principale vient du caractère **dégénéré** de la non-linéarité sous la dérivée par rapport au temps dans le bilan de masse.

Cas particulier I

Cas particulier I

B. Albers, P. Krejčí: Unsaturated porous media flow with thermomechanical interaction, Math. Meth. Appl. Sci. 39 (2016), 2220–2238.

Cas particulier I

B. Albers, P. Krejčí: *Unsaturated porous media flow with thermomechanical interaction*, *Math. Meth. Appl. Sci.* **39** (2016), 2220–2238.

On montre que le système isotherme sans changements de phase

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \left(B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + P[\varepsilon] \right) + \nabla p + g,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(p) + G[p]) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u + \frac{1}{\rho_L} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p)$$

avec des conditions au bord et des conditions initiales appropriées admet une solution forte. with appropriate initial and boundary conditions is shown to admit a strong solution.

Cas particulier I

B. Albers, P. Krejčí: *Unsaturated porous media flow with thermomechanical interaction*, *Math. Meth. Appl. Sci.* **39** (2016), 2220–2238.

On montre que le système isotherme sans changements de phase

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \left(B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + P[\varepsilon] \right) + \nabla p + g,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(p) + G[p]) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u + \frac{1}{\rho_L} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p)$$

avec des conditions au bord et des conditions initiales appropriées admet une solution forte. with appropriate initial and boundary conditions is shown to admit a strong solution.

La fonction $f(p)$ est bornée et strictement croissante. Le système est dégénéré à l'infini, mais aux points de retour des boucles d'hystérésis, la pente de la branche d'hystérésis est positive.

Cas particulier I

B. Albers, P. Krejčí: *Unsaturated porous media flow with thermomechanical interaction*, *Math. Meth. Appl. Sci.* **39** (2016), 2220–2238.

On montre que le système isotherme sans changements de phase

$$\rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \left(B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + P[\varepsilon] \right) + \nabla p + g,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(p) + G[p]) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u + \frac{1}{\rho_L} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p)$$

avec des conditions au bord et des conditions initiales appropriées admet une solution forte. with appropriate initial and boundary conditions is shown to admit a strong solution.

La fonction $f(p)$ est bornée et strictement croissante. Le système est dégénéré à l'infini, mais aux points de retour des boucles d'hystérésis, la pente de la branche d'hystérésis est positive.

Les **itérations de Moser** sont utilisées pour montrer que p reste uniformément borné, moyennant quoi la limite dégénérée n'est jamais atteinte.

Cas particulier II

Cas particulier II

B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: *Solvability of an unsaturated porous media flow problem with thermomechanical interaction*, *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016), 4175–4201.

$$\rho_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \left(B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + P[\varepsilon] \right) + \nabla p - \beta \nabla \theta + g,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(p) + G[p]) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u + \frac{1}{\rho_L} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p),$$

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* + \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_L} \mu(p) |\nabla p|^2 - \beta \theta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u. \end{aligned}$$

Cas particulier II

B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: *Solvability of an unsaturated porous media flow problem with thermomechanical interaction*, *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016), 4175–4201.

$$\rho_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} \left(B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + P[\varepsilon] \right) + \nabla p - \beta \nabla \theta + g,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(p) + G[p]) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u + \frac{1}{\rho_L} \operatorname{div} (\mu(p) \nabla p),$$

$$\begin{aligned} c_V \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) + \left\| \frac{\partial}{\partial t} D_P[\varepsilon] \right\|_* + \left| \frac{\partial}{\partial t} D_G[p] \right| + B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_L} \mu(p) |\nabla p|^2 - \beta \theta \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} u. \end{aligned}$$

Existence des solutions faibles est montrée sous l'hypothèse de croissance super-linéaire du coefficient $\kappa(\theta)$ de la conductivité thermique.

Cas particulier III

Cas particulier III

B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: Periodic waves in unsaturated porous media with hysteresis, arXiv: 1606.04665

Cas particulier III

B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: Periodic waves in unsaturated porous media with hysteresis, arXiv: 1606.04665

On modélise la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux non saturé par le système

$$\begin{aligned}\rho_S u_{tt} + cu_t &= \operatorname{div} A \nabla_s u + \nabla p + f_0, \\ G[p]_t &= \operatorname{div} u_t + \frac{\mu}{\rho_L} \Delta p,\end{aligned}$$

dans un domaine Ω avec les conditions au bord

$$(u - u^*)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla p \cdot n|_{\partial\Omega} = \alpha(x)(p^* - p),$$

où f_0, u^*, p^* sont des fonctions périodiques données et $c > 0$ est le coefficient de frottement.

Cas particulier III

B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: Periodic waves in unsaturated porous media with hysteresis, arXiv: 1606.04665

On modélise la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux non saturé par le système

$$\begin{aligned}\rho_S u_{tt} + c u_t &= \operatorname{div} A \nabla_s u + \nabla p + f_0, \\ G[p]_t &= \operatorname{div} u_t + \frac{\mu}{\rho_L} \Delta p,\end{aligned}$$

dans un domaine Ω avec les conditions au bord

$$(u - u^*)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla p \cdot n|_{\partial\Omega} = \alpha(x)(p^* - p),$$

où f_0, u^*, p^* sont des fonctions périodiques données et $c > 0$ est le coefficient de frottement.

On ne suppose aucune viscosité du solide et aucune régularisation de la relation d'hystérésis.

Cas particulier III

B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: Periodic waves in unsaturated porous media with hysteresis, arXiv: 1606.04665

On modélise la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux non saturé par le système

$$\begin{aligned}\rho_S u_{tt} + cu_t &= \operatorname{div} A \nabla_s u + \nabla p + f_0, \\ G[p]_t &= \operatorname{div} u_t + \frac{\mu}{\rho_L} \Delta p,\end{aligned}$$

dans un domaine Ω avec les conditions au bord

$$(u - u^*)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla p \cdot n|_{\partial\Omega} = \alpha(x)(p^* - p),$$

où f_0, u^*, p^* sont des fonctions périodiques données et $c > 0$ est le coefficient de frottement.

On ne suppose aucune viscosité du solide et aucune régularisation de la relation d'hystérésis.

L'existence de la solution est montrée à l'aide de l'inégalité d'énergie du deuxième ordre sous l'hypothèse que les données sont petites de façon à ce que la solution ne quitte pas le domaine de convexité de l'opérateur d'hystérésis G .

Cas particulier IV

P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **27** (2017), 2675–2710.

Cas particulier IV

P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **27** (2017), 2675–2710.

Le milieu poreux avec changements de phase dans un cas simplifié **sans hystérésis**, sans accélération, sans la compressibilité de l'eau, and sans contraintes de cisaillement

Cas particulier IV

P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **27** (2017), 2675–2710.

Le milieu poreux avec changements de phase dans un cas simplifié sans hystérésis, **sans accélération**, sans la compressibilité de l'eau, and sans contraintes de cisaillement

Cas particulier IV

P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **27** (2017), 2675–2710.

Le milieu poreux avec changements de phase dans un cas simplifié sans hystérésis, sans accélération, **sans la compressibilité de l'eau**, and sans contraintes de cisaillement

Cas particulier IV

P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **27** (2017), 2675–2710.

Le milieu poreux avec changements de phase dans un cas simplifié sans hystérésis, sans accélération, sans la compressibilité de l'eau, and **sans contraintes de cisaillement**

Cas particulier IV

P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **27** (2017), 2675–2710.

Le milieu poreux avec changements de phase dans un cas simplifié sans hystérésis, sans accélération, sans la compressibilité de l'eau, and sans contraintes de cisaillement, ce qui conduit au système comportant l'inconnue scalaire $U = \operatorname{div} u$

$$((\chi + \rho^*(1-\chi))(f(\rho) + U))_t = \frac{1}{\rho_L} \operatorname{div} (\mu(\rho) \nabla \rho),$$

$$\nu U_t + \lambda_M U = \rho(\chi + \rho^*(1-\chi)) + \beta(\theta - \theta_c) - g + H(t),$$

$$\gamma(\theta) \chi_t + \partial I(\chi) \ni (1 - \rho^*) (\Phi(\rho) + \rho U) + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right),$$

$$c_0 \theta_t - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) = \nu U_t^2 + \frac{1}{\rho_L} \mu(\rho) |\nabla \rho|^2 + \gamma(\theta) \chi_t^2 - \frac{L}{\theta_c} \theta \chi_t - \beta \theta U_t,$$

$$H(t) = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\rho(\chi + \rho^*(1-\chi)) + \beta(\theta - \theta_c) - g)(x, t) dx.$$

Cas particulier IV

P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 27 (2017), 2675–2710.

Le milieu poreux avec changements de phase dans un cas simplifié sans hystérésis, sans accélération, sans la compressibilité de l'eau, and sans contraintes de cisaillement, ce qui conduit au système comportant l'inconnue scalaire $U = \operatorname{div} u$

$$((\chi + \rho^*(1-\chi))(f(\rho) + U))_t = \frac{1}{\rho_L} \operatorname{div} (\mu(\rho) \nabla \rho),$$

$$\nu U_t + \lambda_M U = \rho(\chi + \rho^*(1-\chi)) + \beta(\theta - \theta_c) - g + H(t),$$

$$\gamma(\theta) \chi_t + \partial I(\chi) \ni (1 - \rho^*) (\Phi(\rho) + \rho U) + L \left(\frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right),$$

$$c_0 \theta_t - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) = \nu U_t^2 + \frac{1}{\rho_L} \mu(\rho) |\nabla \rho|^2 + \gamma(\theta) \chi_t^2 - \frac{L}{\theta_c} \theta \chi_t - \beta \theta U_t,$$

$$H(t) = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\rho(\chi + \rho^*(1-\chi)) + \beta(\theta - \theta_c) - g)(x, t) dx.$$

Existence pour un problème au bord standard est montrée sous l'hypothèse de décroissance contrôlée de $f'(\rho)$ et croissance contrôlée de $\kappa(\theta)$ et $\gamma(\theta)$ à l'infini.

Références

- [1] B. Albers, P. Krejčí: Unsaturated porous media flow with thermomechanical interaction. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **39** (2016), 2220–2238.
- [2] B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: Solvability of an unsaturated porous media flow problem with thermomechanical interaction. *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016), 4175–4201.
- [3] B. Detmann, P. Krejčí, E. Rocca: Periodic waves in unsaturated porous media with hysteresis. To appear in *Proceedings of ECM*, <http://arxiv.org/abs/1606.04665>.
- [4] P. Krejčí, E. Rocca, J. Sprekels: Unsaturated deformable porous media flow with phase transition. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **27** (2017) 2675–2710.



Stálé zdraví, milý Jerôme!