Analyse Réelle et complexe

D.S. 2

09/04/2019

Exercice 1 (Principe d'incertitude de Heisenberg) (23 pts)

Partie 1 *(5 pts)*

On considère $\sigma > 0$ et la fonction

$$h(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,.$$

a) Montrez que $\int_{\mathbb{R}} h(x)^2\,dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} x\,h(x)^2\,dx = 0$ et que $\int_{\mathbb{R}} x^2\,h(x)^2\,dx = \sigma^2/2$.

b) Calculez $\widehat{h}$. Montrez que $\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(x)^2\,dx = 2\pi$, $\int_{\mathbb{R}} x\,\widehat{h}(x)^2\,dx = 0$ et que $\int_{\mathbb{R}} x^2\,\widehat{h}(x)^2\,dx = \pi/\sigma^2$.

Partie 2 *(8 pts)*

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ qui est C^1 et qui vérifie $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

a) Montrez que $f \in L^2(\mathbb{R})$, en déduire $f \in L^1(\mathbb{R})$ en considérant

$$|f(x)| = \frac{(1+|x|)\,|f(x)|}{1+|x|}\,.$$

b) Montrez que $xf(x)^2 \in L^1(\mathbb{R})$, puis que $xf(x)^2$ tend vers 0 en $\pm\infty$ en considérant la dérivée de $xf(x)^2$. Montrez que $f(x)$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

c) On considère $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(f')$ les transformées de Fourier-Plancherel de f et f' dans $L^2(\mathbb{R})$. Montrez que $\mathcal{F}(f')(x) = ix\mathcal{F}(f)(x)$.

Montrez que $x\mathcal{F}(f)(x) \in L^2(\mathbb{R})$. En déduire $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, puis f et $\mathcal{F}(f) \in C^0_0$; montrez aussi $x\mathcal{F}(f)(x)^2 \in L^1(\mathbb{R})$.

Partie 3 *(10 pts)*

Désormais on note $\widehat{f}$ au lieu de $\mathcal{F}(f)$.

On suppose $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx = 1$. On pose $m_f = \int_{\mathbb{R}} x \, |f(x)|^2 \, dx$ et $m_{\widehat{f}} = \int_{\mathbb{R}} x \left|\widehat{f}(x)\right|^2 \, dx$. Enfin

$$\Delta_f = \left(\int_{\mathbb{R}} (x - m_f)^2 \, |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}, \qquad \Delta_{\widehat{f}} = \left(\int_{\mathbb{R}} (x - m_{\widehat{f}})^2 \left|\widehat{f}(x)\right|^2 \, dx\right)^{1/2},$$

les *dispersions* de f et $\widehat{f}$. On veut prouver une inégalité sur $\Delta_f \Delta_{\widehat{f}}$.

a) Montrez en considérant la fonction $g(x) = e^{-im_{\widehat{f}}\, x} f(x + m_f)$ que l'on peut se ramener sans perte de généralité au cas $m_f = m_{\widehat{f}} = 0$.

On suppose que $m_f = m_{\widehat{f}} = 0$ pour la suite.

b) Montrez que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} x \overline{f(x)} f'(x) \, dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta_f \Delta_{\widehat{f}}.$$

c) Montrez que

$$\Delta_f \Delta_{\widehat{f}} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

d) Montrez que les fonctions h de la partie 1 vérifient l'égalité dans cette inégalité.

Montrez que ce sont les seules fonctions qui réalisent cette égalité.

Exercice 2 (Non surjectivité de la transformée de Fourier) (9 pts)

1) Montrez que la fonction

$$x \mapsto \int_1^x \frac{sin(y)}{y} \, dy$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$.

2) En déduire que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si f est impaire, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\widehat{f}(y)}{y} \, dy$$

existe et est finie.

3) Soit

$$g(x) = \frac{\arctan(x)}{\ln(2 + x^2)}.$$

a) Montrez que $g \in C_0^0(\mathbb{R})$.

b) Montrez que si il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g = \widehat{f}$, alors f est forcement impaire (presque partout).

c) Montrez que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0^0(\mathbb{R})$.