Chap I

Calculs algébriques

I Sommes et produits

1) Définitions

On se donne un ensemble $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \mathbb{Z}$ et une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres réels (ou complexes) indexés par I. On note

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + \cdots + a_{i_p}}$$

et

$$\boxed{\prod_{i \in I} a_i = a_{i_1} \cdots a_{i_p}.}$$

Typiquement on considérera $I = \{0, 1, \dots, n\}$ ou $\{1, \dots, n\}$. On notera alors : $\sum_{i=0}^{n} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i=0}^{n} a_i$, ...

On vérifie facilement :

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

$$\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i$$

2) Changements d'indices

On a $\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=n-p}^{m-p} a_{k+p}$ et $= \sum_{k=n+p}^{m+p} a_{k-p}$

Par exemple $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_k$

Idem pour les produits.

3) Exemples classiques

- Sommes télescopiques : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0}$

- Produits télescopiques : $\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$

- Factorisation de $a^n - b^n$:

$$\boxed{\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i \\ &= (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} \end{aligned}}$$

- Suites arithmétiques :

$$a_i = a_0 + ir$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = (n+1)a_0 + r\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$$

- Suites géométriques :

$$a_i = a_0 q^i$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Plus généralement, $\boxed{\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}}$

- Exercice : $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$, calculez a_n

$$\alpha^n a_0 + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta + \beta = \alpha^n a_0 + \beta \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}.$$

- Deux résultats utiles à savoir :

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \\ \hline \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{array}}$$

A démontrer : 1^{er} = astuce, $2^{ème}$ récurrence.

II Sommes doubles

1) Sur un rectangle

On a maintenant des nombres $a_{i,j}$ indexés par $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{matrix}$$

On peut sommer lignes par lignes :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$$

ou bien colonne par colonne : $\sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$

d'où $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}}$. On note, quand $p=n$: $\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}}$

Proposition

$$\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} c_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} d_i c_j$$

Dém

$$\left(\sum_i d_i\right)\left(\sum_j c_j\right) = \lambda \sum_j c_j = \sum_j \lambda c_j = \sum_j \left(\sum_i d_i\right) c_j = \sum_j \sum_i d_i c_j \text{ etc} \dots \blacksquare$$

2) Sur un triangle

Maintenant nos indices sont comme suit :

$$\begin{array}{llll}
a_{11} & & & \\
a_{21} & a_{22} & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\
\vdots & & & \ddots \\
a_{n,1} & \cdots\cdots & & a_{n,n}
\end{array}$$

La somme en question vaut

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

et elle est notée $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$

III Coefficients binomiaux

1) Factorielle et coeffs binomiaux

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1.2.3.\dots.n$,

et on a la convention $0! = 1$.

Pour $p \leq n \in \mathbb{N}$ on pose : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$ $(p \neq 0)$

Notez que $\binom{n}{0} = 1$.

2) Propriétés

$$\boxed{\begin{aligned} \binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\ \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \binom{n+1}{p+1} \end{aligned}}$$

Dem

La première est évidente.

La deuxième : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right)$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\,\frac{n+1}{(n-p)(p+1)} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}. \blacksquare$$

Rappel : loi binomiale $\mathcal{B}(n,p) \Rightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \mathbb{P}(X=k)$.

3) Formule du binôme de Newton

Théorème

$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$

Dem

Par recurrence :

pour $n=0$, $(a+b)^n = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$

ensuite la récurrence :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \quad \blacksquare$$