$\boxed{\text{CORRIGÉ du CC 2}}$

Exercice 1 $\boxed{23 \text{ pts}}$

J'utilise : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ et $\widehat{e^{-x^2}}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$

1) a) $\boxed{5}$

$$h(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}}\, e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (h \in L^1 \cap L^2)$$

- $\int_{\mathbb{R}} h^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma}\, \sigma \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = 1$ 0,5

- $\int_{\mathbb{R}} x\, h^2(x)\, dx = 0$ par imparité ! 0,5

- $\int_{\mathbb{R}} x^2 h^2(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2/\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} \int \frac{\sigma^2}{2} e^{-x^2/\sigma^2} dx$ (par IPP) 1

$$= \frac{\sigma^2}{2}.$$

b) • $\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\sigma}} \sqrt{\pi}\, \sqrt{2}\, \sigma\, e^{-\frac{\xi^2 2\sigma^2}{4}} = \pi^{1/4} \sqrt{2\sigma}\, e^{-\frac{\xi^2\sigma^2}{2}}$ 1

- $\int_{\mathbb{R}} \hat{h}^2 = 2\pi$ par Plancherel 0,5
  (ou par calcul : $\sqrt{\pi}\, 2\sigma \int e^{-\xi^2\sigma^2} d\xi = \sqrt{\pi}\, 2\sigma \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} = 2\pi$)

- $\int_{\mathbb{R}} \xi\, \hat{h}^2(\xi)\, d\xi = 0$ par imparité ! 0,5

- $\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \hat{h}^2(\xi)\, d\xi = \sqrt{\pi}\, 2\sigma \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\xi^2\sigma^2} d\xi = \sqrt{\pi}\, 2\sigma \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\xi^2\sigma^2} d\xi$ 1

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} = \frac{\pi}{\sigma^2}.$$

2) a) $\boxed{8}$

- Comme f est C^0, seule compte l'intégrabilité en $\pm\infty$ (0,5)

  On a $|f(x)|^2 \leq x^2 |f(x)|^2$ pour $|x| \geq 1$ donc $f \in L^2$ (0,5)

- $(1+|x|)|f(x)| \in L^2$, $\frac{1}{1+|x|} \in L^2$ donc $|f(x)| \in L^1$.

b) • idem que a) $|x|\,|f(x)|^2 \leq x^2 |f(x)|^2$ pour $|x| \geq 1 \Rightarrow x f^2(x) \in L^1$. (0,5)

- $x f^2(x) \in L^1$ et $\left(x f^2(x)\right)' = \underbrace{f^2(x)}_{\in L^1} + 2\underbrace{x f(x)}_{\in L^2}\,\underbrace{f'(x)}_{L^2} \in L^1$ (1,5)

  On a vu en cours : $g \in L^1 + g' \in L^1 \Rightarrow g \to 0$.

- Si $x f(x) \xrightarrow[\infty]{} 0$, alors $f(x)$ aussi. (0,5)

c) • $\mathcal{F}(f')(x) = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f'(y) e^{-ixy}\,dy = \lim\limits_{A\to+\infty} \left[\left[f(y)e^{-ixy}\right]_{-A}^{A} + ix \int_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy}\,dy \right]$

$$= ix \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(y) e^{-ixy}\,dy = ix\,\mathcal{F}(f)(x) \quad \text{p.p. } x$$ (2)

- Comme $\mathcal{F}(f') \in L^2$, alors $x\,\mathcal{F}(f)(x)$ aussi. (0,5)
- idem que pour f : $\mathcal{F}(f) \in L^1$. (0,5)
- $f \in L^1 \Rightarrow \mathcal{F}(f) = \hat{f} \in C^0_0$ (1)

  $\mathcal{F}(f) \in L^1 \Rightarrow f = \overline{\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)})} \in C^0_0$. (0,5)

- $|x|\,|\mathcal{F}(f)(x)|^2 \underset{(|x|\geq 1)}{\leq} |x|^2 |\mathcal{F}(f)(x)|^2 \in L^1$

$\boxed{10}$

3) a) $g(x) = e^{-i m_{\hat{f}} x} f(x + m_f)$

On a $\int_{\mathbb{R}} |g|^2 = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} x |g(x)|^2\,dx = 0$ (facile) (0,5) (0,5)

On a $g = e_{-m_{\hat{f}}}(\tau_{m_f} f)$, donc $\hat{g} = \tau_{m_{\hat{f}}}(\widehat{\tau_{m_f} f}) = \tau_{-m_{\hat{f}}}(e_{-m_f} \hat{f})$

i.e. $\hat{g}(\xi) = e^{-i m_f (\xi + m_{\hat{f}})} \hat{f}(\xi + m_{\hat{f}})$.

On a donc $\int_{\mathbb{R}} x |\hat{g}(x)|^2\,dx = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2\,dx$

Enfin, on trouve aussi facilement

$$\Delta_g = \Delta_f \quad \text{et} \quad \Delta_{\hat g} = \Delta_{\hat f}.$$ ②

Donc le calcul de Δ_f et $\Delta_{\hat f}$ se ramène à ceux de g et $\hat g$.

b) $$\left|\int_{\mathbb{R}} x\,\overline{f(x)}\,f'(x)\,dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x\,\overline{f(x)}|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$= \Delta_f \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Delta_f\left(\int_{\mathbb{R}} |x\,\hat f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$ ⑴,5

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Delta_f\,\Delta_{\hat f}.$$

c) $$\Delta_f\,\Delta_{\hat f} \geqslant \sqrt{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} x\,\overline{f(x)}\,f'(x)\,dx\right| \geqslant \sqrt{2\pi}\left|\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} x\,\overline{f(x)}\,f'(x)\,dx\right|$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} x\left(\overline{f(x)}\,f'(x) + f(x)\,\overline{f'(x)}\right)dx\right|$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left|\Big[x\,f(x)\,\overline{f(x)}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{f(x)}\,dx\right|$$ ②

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

d) Le fait que h vérifie $\Delta_h\,\Delta_{\hat h} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ a été calculé dans le 1). (0,5)

<u>Réciproque pour l'égalité.</u>

La première inégalité dans b) devient égalité ssi $f'(x) = \lambda x f(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

(Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$)

La deuxième dans c) est équivalente à λ réel.

D'où finalement $f'(x) = \lambda x f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(x) = \alpha e^{\lambda x^2/2}$

λ doit être <0 pour que $f \in L^2$ ③

avec la normalisation pour que $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$, on tombe sur les fonctions h.

Exercice 2

$\boxed{9}$

1) $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par cont. en 0. Donc aucun problème d'intégration $\int_1^x$.
L'intégrale est une fonction continue de la borne. (1)

$\int_1^x \frac{\sin y}{y}\,dy = \left[-\frac{\cos y}{y}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos y}{y^2}\,dy$: Le terme entre crochet tend vers $-\cos 1$ quand $x \to +\infty$
l'intégrale a une limite car $\frac{\cos y}{y^2}$ est absolument intégrable sur $[1,+\infty[$ (1,5)

2) Si f impaire alors $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-ixy}\,dx = \int_0^\infty f(x)\left(e^{-ixy} - e^{ixy}\right)dx = 2i\int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,dx$ 1

$$\int_1^x \frac{\hat{f}(y)}{y}\,dy = 2i\int_1^x\int_0^\infty f(z)\,\frac{\sin(zy)}{y}\,dz\,dy.$$

On a $\int_1^x\int_0^\infty |f(z)|\,\frac{1}{|y|}\,dz\,dy < \infty$ donc on peut appliquer Fubini

$$= 2i\int_0^\infty f(z)\int_1^x \frac{\sin(zy)}{y}\,dy\,dz = 2i\int_0^\infty f(z)\int_z^{zx}\frac{\sin(y)}{y}\,dy\,dz \quad (*)$$ 1

Si on note $\phi(x) = \int_1^x \frac{\sin y}{y}\,dy$, alors $(*) = 2i\int_{\mathbb{R}} f(z)\left(\phi(zx) - \phi(z)\right)dz$ (3)

ϕ est continue, $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(zx)$ finie $\Rightarrow$ ϕ bornée. On peut appliquer conv. dominée, l'intégrale $(*)$ admet une limite finie en $+\infty$. 1

3) a) évident (0,5)
b) g est impaire. Si $g = \hat{f}$, alors soit $h(x) = -f(-x)$, on a $\hat{h}(x) = -\hat{f}(-x) = -g(-x) = g(x) = \hat{f}(x)$.
Donc $h = f$, f est impaire. (1,5)

c) Si $g = \hat{f}$, alors $\int_1^x \frac{g(y)}{y}\,dy$ a une limite finie en $+\infty$.
(1,5)
Mais $\frac{g(y)}{y} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4y\ln y}$ donc $\int_1^x \frac{g(y)}{y}\,dy \underset{\text{(Bertrand)}}{\longrightarrow} +\infty$