Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - Analyse

Feuille d'exercices n° 2

Espaces vectoriels normés

I. Normes

Exercice 1. (Normes dans $\mathbb{R}^n$) Dans cet exercice on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

(A) Montrer que la fonction

$$\begin{array}{cccc} \| \ \|_2 & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array} .$$

satisfait les conditions suivantes qui définissent une norme :

1. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\|_2 \geq 0$, et $\|x\|_2 = 0$ si et seulement si $x = 0$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$;
3. pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. (*Pour vérifier que* $\| \ \|_2$ *satisfait l'inégalité triangulaire, vous pouvez vous servir sans preuve de* ***l'inégalité de Cauchy-Schwarz*** *:*

$$\textit{pour tous} \ \ (a_1, \ldots, a_n) \ , \ \ (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \ \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \ . \ )$$

(B) Montrer que les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

définissent des normes. Dessiner $B((0,0), 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, par rapport à $\|x\|_\infty$ et $\|x\|_1$.

(C) Montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccccc} \| \ \| & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de la forme $\|x\| = \alpha |x|$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Exercice 2. On travaille sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier (sans calcul) que les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.
2. Trouver des constants α, β et γ positives telles que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_1 \leq \alpha \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_\infty \leq \gamma \|u\|_1. \tag{1}$$

   En déduire directement de (1) que les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.

3. Soient $\| \ \|_p$ la norme p avec $p \geq 1$ qui est définie par $||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$ et $\| \ \|_\infty$ la norme ∞ qui est définie par $||x||_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\lim_{p \to \infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

Exercice 3. On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} N_1 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array} , \qquad \begin{array}{ccccc} N_2 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \end{array} .$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à N_1, et par rapport à N_2.

Exercice 4. Les applications N suivantes sont-elles des normes ?

1. $N : C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
2. $N : C([0;1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|^2$.
3. $N : C([0;1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in[0;\frac{1}{2}]} |f(x)|$.
4. $N : C([0;1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$.
5. $N : C([0;2\pi],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)\sin t|\, dt$.
6. $N : C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$
7. $N : C([0;1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right|$.
8. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto |x| + 2|y|$.
9. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$.

où $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Pour tout $f \in C([0;1],\mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2\,\mathrm{d}t}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

1. En adaptant un peu l'exercice précédent, on sait que $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur $C([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que $\|\ \|_2$ définit aussi une norme sur $C([0;1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $f \in C([0;1],\mathbb{R})$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas deux à deux équivalentes.

   Indication : on pourra considérer les fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application N_∞ par $N_\infty(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N_∞ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$.
2. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de E. Montrer que l'ensemble des x_n est borné.

Exercice 8. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et on considère N définie par :

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \text{ pour tout } f \in E.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.

2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$.

   (a) Pour un $n \in \mathbb{N}^\star$, tracer la courbe de f_n.

   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers la fonction nulle dans (E, N).

   (c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $(E, \|.\|_\infty)$.

   (d) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 9. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et on considère une suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit deux applications N et N' sur E par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E, \quad N(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k |a_k| \quad \text{et } N'(P) = \max_{k\in[\![0;n]\!]} |a_k| .$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que N définisse une norme sur E. On admet que N' définit une norme sur E.

2. Dans cette question, on suppose que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = 1 + X + \cdots + X^n$. Étudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N'.