Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV Analyse

Feuille d'exercices n° 3

Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1. (Premiers pas en topologie) Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que l'intérieur de A est égal à A si et seulement si A est ouvert.

Exercice 2. (Normes équivalentes et les topologies qu'elles induisent) Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2.

1. Montrer que $A \subset E$ est une partie ouverte de E par rapport à N_1 si et seulement si A est ouvert par rapport à N_2.
2. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in E$ par rapport à N_1 si et seulement s'il en est de même par rapport à N_2.

Exercice 3. (Ensembles finis) Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé non nul.

1. Montrer que toute partie finie de E est fermée et d'intérieur vide.
2. Trouver une partie infinie de E qui est fermée et d'intérieur vide.

Exercice 4. (Propriétés topologiques de parties de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) Déterminer les propriétés topologiques des ensembles suivants. Sont-ils ouverts, fermés, compacts ? Déterminer leurs adhérences.

Dans $\mathbb{R}$

1. Un intervalle I,
2. $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Dans $\mathbb{R}^2$

3. $A = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
4. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$;
5. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0\}$.

Dans $\mathbb{R}^3$

6. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ , \ z < 0\}$ ou plutôt $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ 0 < \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Exercice 5. (La densité des rationnels) On munit $\mathbb{R}$ de la norme valeur absolue. Quelle est l'adhérence $\mathbb{Q}$ dans la topologie induite par cette norme.

Exercice 6. (Fermés, Compacts)

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A+B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A+B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A+B$ n'en est pas un.

Exercice 7. (Compacts) Soit $(E, \| \, .\|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et on note $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un fermé de E pour la norme $\| \, . \, \|_\infty$.
2. Le but de cette question est de montrer que F n'est pas un fermé de E pour la norme $\| \, . \, \|_1$ mais qu'il est dense dans $(E, \| \, . \, \|_1)$.
   (a) Soit $g \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par
   $$\forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], f_n(t) = ntg\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right], \quad f_n(t) = g(t).$$
   Montrer que $f_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers g pour $\| \, . \, \|_1$.
   (c) Conclure.

Exercice 9. (Compacts) On considère $E = \mathcal{C}([0;2\pi];\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \, . \, \|_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{inx}$ pour tout $x \in [0;2\pi]$.

1. Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, calculer explicitement $\|f_n - f_p\|_2$.
2. Construire à partir de la suite $(f_n)_n$, une suite $(g_n)_n$ d'éléments de la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E et calculer $\|g_n - g_p\|_2$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $\overline{B}(0_E, 1)$ de E n'est pas compacte.