Fondamentaux des Mathématiques II

Stéphane Attal

18 janvier 2018

Table des matières

Première partie

ALGEBRE

Chapitre 1

Fractions rationnelles

1.1 Définitions

Les *fractions rationnelles* font suite aux polynômes que vous avez étudiés au Semestre 1. Là encore l'esprit est algébrique plutôt qu'analytique. Il ne s'agit pas d'étudier les propriétés exactes des fonctions rationnelles (graphes, limites, dérivées etc.), mais plutôt les propriétés algébriques de ces fonctions : manipulation des expressions, simplifications, etc. Avec un objectif majeur : la *décomposition en éléments simples.* C'est une représentation très pratique et très simple des fractions rationnelles ; la principale application est le calcul des primitives. En effet, à la fin de ce chapitre nous serons capable de calculer la primitive de n'importe quelle fonction de la forme

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes. Par exemple

$$F(x) = \frac{3x^4 - 7x + 5}{x^3 - x^2 + x - 12}\,.$$

Aujourd'hui avec vos outils usuels de calcul de primitives, vous ne pouvez en aucune manière calculer une primitive (ou une intégrale) avec une telle fonction.

Nous pouvons attaquer les définitions.

Définition 1 *Une* fraction rationnelle *sur un corps* $\mathbb{K}$ *(qui sera* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est une expression formelle de la forme*

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

où P et Q sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$.

On comprend cette expression comme un quotient de polynômes avec les propriétés algébriques qui en découlent, en particulier on identifie deux fractions rationnelles

$$\frac{P_1(X)}{Q_1(X)} = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$

si et seulement si

$$P_1(X)Q_2(X) = P_2(X)Q_2(X)$$

au sens de l'égalité dans $\mathbb{K}[X]$.

L'ensemble des fractions rationnelles sur le corps $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

Proposition 1.1.1 *Toute fraction rationnelle $f(X)$ peut s'écrire*

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

avec $P \wedge Q = 1$ et Q unitaire. L'écriture de F sous cette forme est unique.

Démonstration Si $F(X) = P(X)/Q(X)$ et que $D = P \wedge Q$, on alors $P = P_1\, D$ et $Q = Q_1\, D$ donc $f = (P_1\, D)/(Q_1\, D)$. Mais avec la définition de l'égalité des fractions rationnelles, cette fraction est aussi égale à P_1/Q_1.

On peut aussi factoriser le coefficient de plus haut degré de Q et simplifier le quotient, cela rend Q unitaire. Nous avons prouvé l'existence de cette représentation de f.

Pour l'unicité, par l'absurde supposons que $F = P_1/Q_1 = P_2/Q_2$ sont deux représentations de F avec ces propriétés. On a donc $P_1\, Q_2 = P_2\, Q_1$, donc Q_2 divise $P_2\, Q_1$, mais comme $Q_2 \wedge P_2 = 1$ on a Q_2 divise Q_1, par le Théorème de Gauss pour les polynômes. De la même façon on montre que Q_1 divise Q_2, donc les polynômes Q_1 et Q_2 sont égaux à un facteur scalaire près. Mais comme ils sont tous deux unitaires, ils sont donc égaux. On obtient ensuite facilement que P_1 et P_2 sont aussi égaux. $\square$

Les polynômes usuels ($P(X) \in \mathbb{K}[X]$) sont vu comme des cas particulier de fractions rationnelles, en les identifiant à la fraction rationnelle $P(X)/\mathbb{1}$.

Définition 2 *Les opérations de* somme *et de* produit *pour les fractions rationnelles sont définies comme suit : si $F(X) = P_1(X)/Q_1(X)$ et $G(X) = P_2(X)/Q_2(X)$, on pose*

$$F(X) + G(X) = \frac{P_1(X)Q_2(X) + P_2(X)Q_1(X)}{Q_1(X)Q_2(X)}$$

et

$$F(X)G(X) = \frac{P_1(X)P_2(X)}{Q_1(X)Q_2(X)}\,.$$

Ce sont encore des éléments de $\mathbb{K}(X)$.

Muni de ces lois $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ *est un corps commutatif (remarque culturelle, hors programme).*

Définition 3 *On appelle* degré *d'une fraction rationnelle* $F = P/Q$, *la quantité*

$$\deg F = \deg P - \deg Q\,,$$

où $\deg P$ *et* $\deg Q$ *sont les degrés usuels de* P *et* Q *en tant que polynômes.*

Notez que $\deg F$ *appartient à* $\mathbb{Z}$ *et pas seulement à* $\mathbb{N}$.

Proposition 1.1.2 *Le degré de* F *ne dépend pas de la représentation de* F *sous la forme* P/Q.

On a les mêmes propriétés que pour les polynômes, à savoir

$$\deg(F+G) \leq \max\{\deg f, \deg g\}\,, \qquad \deg FG = \deg f + \deg g\,.$$

Démonstration Si $F = P_1/Q_1 = P_2/Q_2$, alors $P_1Q_2 = P_2Q_1$, donc $\deg(P_1Q_2) = \deg(P_2Q_1)$, c'est à dire $\deg P_1 + \deg Q_2 = \deg P_2 + \deg Q_1$. Ce qui donne finalement $\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$. Ce qui prouve que $\deg F$ ne dépend pas de la représentation $f = P/Q$.

La formule de degré du produit est laissée en exercice. Faisons le cas de la somme. On a

$$\begin{aligned}
\deg F + G &= \deg P_1Q_2 + P_2Q_1 - \deg Q_1Q_2 \\
&\leq \max\{\deg P_1Q_2, \deg P_2Q_1\} - \deg Q_1 - \deg Q_2 \\
&= \max\{\deg P_1 + \deg Q_2, \deg P_2 + \deg Q_1\} - \deg Q_1 - \deg Q_2\,.
\end{aligned}$$

On distingue les deux cas :

– si $\deg P_1 + \deg Q_2 \leq \deg P_2 + \deg Q_1$ (ce qui revient à $\deg F \leq \deg G$), alors le dernier membre ci-dessus vaut $\deg P_2 + \deg Q_1 - \deg Q_1 - \deg Q_2 = \deg G$,

– si $\deg P_1 + \deg Q_2 \geq \deg P_2 + \deg Q_1$ (ce qui revient à $\deg f \geq \deg g$), alors le dernier membre ci-dessus vaut $\deg P_1 + \deg Q_2 - \deg Q_1 - \deg Q_2 = \deg F$.

Donc au final $\deg F + G \leq \max\{\deg F, \deg G\}$. □

Définition 4 *Soit* $F = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ *mis sous sa forme réduite. On appelle* zéros *de* F *les racines de* P. *On appelle* pôles *de* F *les racines de* Q.

Les pôles sont les points de $\mathbb{K}$ *où la* fonction f *n'est pas définie.*

La multiplicité *d'un pôle* x_0 *de* f *est la multiplicité de* x_0 *comme racine de* Q.

Définition 5 *On définit la* dérivée formelle *de la fraction rationnelle $F = P/Q$ par*

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}\,.$$

C'est aussi une fraction rationnelle.

1.2 Décomposition en éléments simples

La première étape consiste à se ramener à des fractions rationnelles P/Q où $\deg P < \deg Q$.

Proposition 1.2.1 *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, alors il existe un unique décomposition*

$$F = E + G$$

où E est un polynôme ($E \in \mathbb{K}[X]$) et G est une fraction rationnelle telle que $\deg G < 0$.

Démonstration On prend une représentation $f = P/Q$. Si $\deg P < \deg Q$ il n'y a rien à faire. Si $\deg P \geq \deg Q$ alors on effectue une division euclidienne de P par Q, ce qui donne une décomposition

$$P = EQ + R$$

avec $E, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg R < \deg Q$. Cela donne

$$F = E + \frac{R}{Q}\,,$$

d'où la représentation annoncée.

Montrons l'unicité de cette représentation. Si $F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2$ sont deux décompositions de cette forme, alors $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$ est de degré strictement négatif, ce qui est impossible pour un polynôme, sauf pour le polynôme nul. On a donc $E_1 = E_2$ et donc $G_1 = G_2$. □

On traite maintenant chaque pôle.

Proposition 1.2.2 *Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle, avec un pôle a de multiplicité k. Soit $\widetilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = (X-a)^k\,\widetilde{Q}(X)$. Alors, il existe un unique couple $R, S \in \mathbb{K}[X]$ tel que* $\deg S < k$ *et*

$$F = \frac{R}{\widetilde{Q}} + \frac{S}{(X-a)^k}\,.$$

Démonstration Regardons tout de suite l'unicité. Si

$$F = \frac{R_1}{\widetilde{Q}} + \frac{S_1}{(X-a)^k} = \frac{R_2}{\widetilde{Q}} + \frac{S_2}{(X-a)^k}$$

on a alors

$$(R_1 - R_2)(X-a)^k = (S_1 - S_2)\widetilde{Q}\,.$$

La racine a est de multiplicité au moins k dans le membre de gauche, alors qu'elle ne peut être que de multiplicité strictement inférieure dans le membre de droite. Donc on a forcément $R_1 - R_2 = 0$ et on obtient facilement l'unicité.

Montrons l'existence maintenant. Comme $(X-a)^k$ et $\widetilde{Q}$ sont premiers entre eux, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = U(X-a)^k + V\,\widetilde{Q}$. On effectue ensuite la division euclidienne de V par $(X-a)^k$, ce qui donne $V = A(X-a)^k + B$, avec deg $B < k$. On a ainsi

$$P = (U + A\widetilde{Q})(X-a)^k + B\widetilde{Q}\,,$$

ce qui donne

$$F = \frac{U + A\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}} + \frac{B}{(X-a)^k}\,.$$

C'est la décomposition annoncée. □

Définition 6 *La partie $S/(X-a)^k$ dans le théorème ci-dessus est appelée* partie polaire de F associée au pôle a.

On peut maintenant énoncer le premier grand théorème de décomposition en éléments simples.

Théorème 1.2.3 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$) *Pour toute fraction rationnelle $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ avec*

$$Q(X) = (X-a_1)^{k_1} \,\ldots\, (X-a_n)^{k_n}$$

il existe une unique décomposition

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_1^i}{X-a_i} + \frac{\lambda_2^i}{(X-a_i)^2} + \ldots + \frac{\lambda_{k_i}^i}{(X-a_i)^{k_i}} \right)\,,$$

avec $E \in \mathbb{C}[X]$ et tous les $\lambda_j^i \in \mathbb{C}$.

Démonstration On applique la proposition 1.2.1, puis on répète la proposition 1.2.2 pour obtenir la représentation

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(X-a_i)^{k_i}}\,, \tag{1.1}$$

avec $E, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ et deg $A_i < k_i$. Il suffit maintenant de voir comment s'effectue le passage de $A_i/(X-a_i)^{k_i}$ à

$$\frac{\lambda_1^i}{X-a_i} + \frac{\lambda_2^i}{(X-a_i)^2} + \ldots + \frac{\lambda_{k_i}^i}{(X-a_i)^{k_i}}\,.$$

Le polynôme A_i appartient à $\mathbb{C}_{k_i-1}[X]$, la famille $\mathbb{1}, (X-a_i), \ldots, (X-a_i)^{k_i-1}$ est une base de $\mathbb{C}_{k_i-1}[X]$ (car échelonnée), donc il existe $\lambda_1^i, \ldots, \lambda_{k_i}^i \in \mathbb{C}$ tels que

$$A_i = \sum_{j=1}^{k_i-1} \lambda_j^i (X-a_i)^{k_j}\,. \tag{1.2}$$

Ce qui donne la décomposition voulue.

Montrons l'unicité. Si on a deux telles décompositions alors les parties entières sont égales, en utilisant l'argument déjà vu de degré strictement négatif pour un polynôme.

Ensuite, dans la proposition 1.2.2, la partie polaire de a est unique. Donc la décomposition (1.1) est unique.

Ensuite la décomposition (1.2) est aussi unique car c'est une décomposition dans une base. On a montré l'unicité. □

Dans $\mathbb{R}(X)$ la décomposition en éléments simples prend une forme différente.

Théorème 1.2.4 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$) *Pour toute fraction rationnelle $F = P/Q \in \mathbb{R}(X)$ avec*

$$Q(X) = (X-a_1)^{k_1} \ldots (X-a_n)^{k_n} (X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^{l_1} \ldots (X^2+\beta_m X+\gamma_m)^{l_m}\,,$$

la décomposition de Q en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, il existe une unique décomposition

$$F = E + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_1^i}{X-a_i} + \frac{\lambda_2^i}{(X-a_i)^2} + \ldots + \frac{\lambda_{k_i}^i}{(X-a_i)^{k_i}}\right) + \\ + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\mu_1^i X+\eta_1^i}{X^2+\beta_i X+\gamma_i} + \ldots + \frac{\mu_m^i X+\eta_m^i}{(X^2+\beta_i X+\gamma_i)^{l_m}}\right)$$

avec $E \in \mathbb{R}[X]$ et tous les $\lambda_j^i, \mu_j^i, \eta_j^i \in \mathbb{R}$.

Démonstration On décompose Q en facteur irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et on considère la décomposition en éléments simples associée, pour F, sur $\mathbb{C}[X]$. Comme F est réelle, en particulier les racines de Q sont complexes conjuguées. Il est alors facile de voir, en considérant $\overline{F}$ que les coefficients λ_j^i de la décomposition de F en éléments simples, sont conjugués pour les racines conjuguées, i.e. de la forme

$$\frac{\lambda}{(X-z)^k} + \frac{\overline{\lambda}}{(X-\overline{z})^k} \,.$$

Quand on regroupe ces deux termes on obtient quelque chose de la forme $P/(X^2+\beta X+\gamma)^k$ où les polynômes sont réels maintenant et où deg $P = k$.

En faisant des divisions euclidiennes successives de P par $X^2+\beta X+\gamma$ on obtient une représentation de P sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{k} D_i (X^2+\beta X+\gamma)^i$$

où les D_i sont de degré 1 au plus. Cela donne la représentation annoncée. □

1.3 Méthodes pratiques

Nous allons passer en revue, à travers des exemples, des méthodes effectives pour calculer ces décompositions en éléments simples.

1.3.1 La partie entière

On rappelle ici brièvement que la partie entière de F est obtenue en effectuant la division euclidienne de P par Q. On suppose donc dans la suite que deg $P <$ deg Q.

1.3.2 Multiplicité 1, degré 1

Regardons le cas où les zéros de Q sont tous de multiplicité 1 et qu'il n'y a pas de partie irréductible de degré 2. Typiquement

$$F = \frac{3X^2-7X+5}{(X+1)X(X-2)} \,.$$

On sait que F va se décomposer sous la forme

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X-2)} \,.$$

Si on multiplie à gauche et à droite par $(X+1)$ on obtient

$$\frac{3X^2-7X+5}{X(X-2)} = a + \frac{b(X+1)}{X} + \frac{c(X+1)}{(X-2)}\,.$$

En prenant $X=-1$, on trouve

$$\frac{15}{3} = a\,,$$

i.e. $a=5$.

De la même façon, en multipliant par X et en faisant $X=0$ on trouve $b=-5/2$. Enfin, en multipliant par $(X-2)$ et en faisant $X=2$, on obtient $c=1/2$. D'où

$$\frac{3X^2-7X+5}{(X+1)X(X-2)} = \frac{5}{X+1} + \frac{-5/2}{X} + \frac{1/2}{(X-2)}\,.$$

1.3.3 Multiplicité quelconque, degré 1

Ici on regarde toujours le cas où les partie irréductibles sont de degré 1, mais avec multiplicité. La meilleure technique ici est celle des développements limités.

Par exemple, si

$$F(X) = \frac{4X^2-3X+1}{X(X-1)^2}$$

on sait qu'on aura une décomposition en

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X-1)^2}\,.$$

On va déterminer b et c. Notez que dans cette méthode cela se fait indépendamment de la connaissance ou non de a (que l'on obtient facilement d'ailleurs par la méthode ci-dessus : multiplication par X, puis $X=0$).

On multiplie tout par $(X-1)^2$ et on pose $X=1+h$:

$$\frac{4(1+h)^2-3(1+h)+1}{1+h} = \frac{a}{1+h}h^2 + bh + c = c + bh + o(h)\,.$$

On fait un développement limité à l'ordre 1 du membre de gauche (en $h=0$) :

$$(4+8h-3-3h+1+o(h))(1-h+o(h)) = 2+3h+o(h)\,.$$

Ce qui donne directement $b=3$ et $c=2$.

On obtient $a = 1$ par la méthode du cas précédent, ce qui donne finalement

$$\frac{4X^2 - 3X + 1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)} + \frac{2}{(X-1)^2}\,.$$

Un autre exemple

$$F(X) = \frac{1}{X^3(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2}\,.$$

On multiplie par X^3 et on pose $X = h$:

$$\frac{1}{(h+1)^2} = ah^2 + bh + c + \frac{d}{h+1}h^3 + \frac{e}{(h+1)^2}h^3 = ah^2 + bh + c + o(h^2)\,.$$

On effectue un D.L. à l'ordre 2 du membre de gauche :

$$\frac{1}{(h+1)^2} = 1 - (2h + h^2) + (2h + h^2)^2 + o(h^2) = 1 - 2h + 3h^2 + o(h^3)\,.$$

Ce qui donne $a = 3, b = -2, c = 1$.

On multiplie par $(X+1)^2$ et on pose $X = -1 + h$:

$$\frac{1}{(-1+h)^3} = \frac{a}{(-1+h)}h^2 + \frac{b}{(-1+h)^2}h^2 + \frac{c}{(-1+h)^3}h^2 + \frac{d}{h} + e = e + dh + o(h)\,.$$

On fait un D.L. à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{(-1+h)^3} = -1 - 3h + o(h)\,.$$

Ce qui donne $e = -1, d = -3$. Finalement

$$\frac{1}{X^3(X+1)^2} = \frac{3}{X} + \frac{-2}{X^2} + \frac{1}{X^3} + \frac{-3}{X+1} + \frac{-1}{(X+1)^2}\,.$$

Il y a une méthode sans D.L., mais plus longue ; la voici.

$$\frac{4X^2 - 3X + 1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X-1)^2}\,.$$

On multiplie par $(X-1)^2$ et on fait $X = 1$:

$$\frac{4X^2 - 3X + 1}{X} = \frac{a}{X}(X-1)^2 + b(X-1) + c\,,$$

et finalement $c = 2$.

On retranche $2/(X-1)^2$ des deux côtés :

$$\frac{4X^2-3X+1}{X(X-1)^2} - \frac{2}{(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)},$$

i.e.

$$\frac{4X^2-5X+1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)}.$$

Le membre de gauche doit se simplifier par $X-1$ ... c'est le cas

$$\frac{4X-1}{X(X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X-1)}$$

et là on sait faire, par substitution ! ($a=1$, $b=3$)

De la même façon, on fait le deuxième exemple. On part de la forme

$$F(X) = \frac{1}{X^3(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2}.$$

On multiplie par X^3

$$\frac{1}{(X+1)^2} = aX^2 + bX + c + \frac{d}{X+1}X^3 + \frac{e}{(X+1)^2}X^3$$

et on fait $X=0$

$$1 = c.$$

On soustrait $1/X^3$

$$\frac{1}{X^3(X+1)^2} - \frac{1}{X^3} = \frac{1-(X+1)^2}{X^3(X+1)^2} = \frac{-X-2}{X^2(X+1)^2}$$

$$\frac{-X-2}{X^2(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2}$$

et on recommence : multiplication par X^2, $X=0$, donnent

$$b = -2.$$

Ainsi de suite ...

$$\frac{-X-2}{X^2(X+1)^2} - \frac{-2}{X^2} = \frac{2X+3}{X(X+1)^2}$$

d'où

$$a = 3$$

puis

$$\frac{2X+3}{X(X+1)^2} - \frac{3}{X} = \frac{-3X-4}{(X+1)^2}$$

etc.

1.3.4 Cas général

Maintenant on incorpore les termes irréductibles de degré 2.
Commençons par

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X-1)} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{c}{X-1}\,,$$

avec a, b, c réels. On utilise la méthode de multiplication, substitution avec une des racines complexes de X^2+1 :

$$\frac{1}{(X-1)} = \frac{aX+b}{+}\frac{c}{X-1}\,,$$

et en faisant $X = i$

$$-\frac{1}{2}(i+1) = ai + b\,.$$

Comme a, b sont réels, on a directement $a = b = -1/2$. Ensuite on obtient $c = 1/2$ par la même méthode.

Dans un cas de multiplicité

$$F(X) = \frac{X}{(X^2+1)^2(X-1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2} + \frac{e}{X-1}\,,$$

On fait la méthode par substitutions successives (faire des D.L. dans $\mathbb{C}$ est un peu délicat et hors programme) :

$$F(X) = \frac{X}{(X-1)^2} = (aX+b)(X^2+1) + cX + d + \frac{e}{X-1}(X^2+1)^2\,,$$

puis $X = i$

$$-\frac{1}{2} = ci + d\,,$$

d'où $c = 0, d = -1/2$. On soustrait

$$\frac{X}{(X^2+1)^2(X-1)^2} - \frac{-1/2}{(X^2+1)^2} = \frac{1/2}{(X^2+1)(X-1)^2}\,.$$

On trouve facilement $a = 0, b = 1/4$, et ainsi de suite ...

Deuxième partie

ANALYSE

Chapitre 2

Développements limités

Nous attaquons ici un chapitre fondamental de l'analyse : celui où l'on va aborder les développements limités. Il s'agit d'un outil incontournable pour l'étude fine du comportement des fonctions, c'est un outil redoutablement efficace pour le calcul de limites difficiles.

2.1 Comparaison de fonctions

Dans ce qui suit a est soit un réel, soit $\pm\infty$.

Définition 7 *On dit qu'une fonction f est* négligeable *devant une fonction g au voisinage de a, s'il existe une fonction ε telle que* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ *et*

$$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)\,.$$

On écrit alors que $f = o(g)$ au voisinage de a, *ou encore $f = o_a(g)$.*

Par exemple $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0, puisque $x^3 = x \times x^2$ et que $\varepsilon(x) = x$ tend vers 0 en 0. Ou encore $x^2 = o(x^5)$ au voisinage de $+\infty$, puisque $x^2 = x^5 \times 1/x^3$.

Je vous rappelle ici un théorème que vous avez vu au 1er semestre, le théorème des croissances comparées, exprimé ici en terme de négligeabilité.

Théorème 2.1.1 *Quelques soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ on a*

$$(\ln(x))^\alpha = o\left(x^\beta\right) \qquad \textit{et} \qquad x^\beta = o\left(e^{\gamma x}\right)\,,$$

au voisinage de $+\infty$ et on a

$$|\ln(x)|^\alpha = o\left(x^{-\beta}\right)$$

au voisinage de 0.

Quelques propriétés et manipulations avec les o.

Proposition 2.1.2

1) Au voisinage de a, si $f = o(g)$ et si $g = o(h)$ alors $f = o(h)$.

2) Au voisinage de a, si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

3) Au voisinage de a, si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$.

4) Au voisinage de a, si $f = o(g)$ alors $1/g = o(1/f)$.

Toutes les démonstrations des résultats ci-dessus sont évidentes et laissées au lecteur. Par contre, notez bien qu'il ne faut pas faire les erreurs suivantes.

– Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors il n'est pas vrai que $f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$. En effet, au voisinage de 0, on a $x^2 = o(x)$ et $-x^3 = o(-x + x^2)$ mais par contre $x^2 - x^3$ n'est pas un $o(x^2)$.

– Avec les quotients de fonctions rien de général ne marche.

Notez qu'avec nos notations on écrit $f = o(1)$ au voisinage de a pour dire f tend vers 0 en a.

2.2 Equivalence de fonctions

Définition 8 *On dit que f est* équivalente *à g au voisinage de a si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

On note cela $f \sim_a g$, ou bien $f \sim g$ au voisinage de a. Notez que c'est équivalent à $f = g + o(g)$ au voisinage de a.

Théorème 2.2.1

1) La relation $\sim$ au voisinage de a est une relation d'équivalence entre fonctions : elle est symétrique, réflexive et transitive.

2) Si $f \sim_a g$ alors $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \to a} g(x)$ existe. Dans ce cas les limites sont égales.

3) On peut prendre le produit, le quotient (si bien défini) et les puissances des équivalents.

4) Si $\lim_{x \to b} \phi(x) = a$ et si $f \sim_a g$ alors $f \circ \phi \sim_b g \circ \phi$.

Démonstration

1) Le fait que $f \sim_a f$ est une évidence.

Si $f \sim_a g$ alors $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$ où $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Mais dans ce cas, en posant

$$\varepsilon'(x) = \frac{\varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)}$$

on a $\lim_{x\to a} \varepsilon'(x) = 0$ et $g(x) = (1 - \varepsilon'(x))f(x)$. Ainsi $g \sim_a f$.

Enfin, si $f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ alors $f = (1 + \varepsilon)g$ et $g = (1 + \varepsilon')h$ d'où $f = (1 + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon\varepsilon')h$ ce qui donne le résultat facilement.

2) On a $g(x) = (1 + \varepsilon(x))f(x)$ donc $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

4) On a $f(\phi(x)) = (1+\varepsilon(\phi(x)))g(\phi(x))$, mais $\lim_{x\to b} \varepsilon(\phi(x)) = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

3) Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors

$$\begin{aligned}
f_1(x)f_2(x) &= (1 + \varepsilon_1(x))(1 + \varepsilon_2(x))g_1(x)g_2(x) \\
&= (1 + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))g_1(x)g_2(x)\,. \\
\frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{1 + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)}\,\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \\
&= (1 + \varepsilon_1(x))(1 - \varepsilon_2'(x))\,\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,.
\end{aligned}$$

On passe facilement aux puissances $n \in \mathbb{Z}$ en itérant le résultat ci-dessus, du coup on passe aux puissances rationnelles (si les fonctions sont > 0). Pour les puissances quelconques, si f et g sont > 0 et $f \sim_a g$ alors

$$f(x)^\alpha = e^{\alpha \ln(f(x))} = e^{\alpha \ln((1+\varepsilon(x))g(x))} = e^{\alpha \ln(1+\varepsilon(x))} e^{\alpha \ln(g(x))}\,.$$

La limite de $e^{\alpha \ln(1+\varepsilon(x))}$ quand $x \to a$ est clairement 1, d'où le résultat. $\square$

Les erreurs à ne pas faire avec les équivalents :

– En général on ne peut pas additionner (ou soustraire) des équivalents. Par exemple $x^2 - x \sim_0 -x$ et $x \sim_0 x$, par contre $x^2 \not\sim_0 0$.

– On ne peut pas composer les équivalents par une fonction *à gauche*. Par exemple $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$, mais

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

et donc $e^{x^2+x} \not\sim_{+\infty} e^{x^2}$.

Théorème 2.2.2 (Equivalents importants en 0)

$$\begin{aligned}
e^x &\sim 1+x, & e^x &= 1+x+o(x)\\
\ln(1+x) &\sim x, & \ln(1+x) &= x+o(x)\\
\sin(x) &\sim x, & \sin(x) &= x+o(x^2)\\
\cos(x) &\sim 1-\frac{x^2}{2}, & \cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
\tan(x) &\sim x, & \tan(x) &= x+o(x^2)\\
\frac{1}{(1+x)^\alpha} &\sim 1+\alpha x, & \frac{1}{(1+x)^\alpha} &= 1+\alpha x+o(x)\,.
\end{aligned}$$

Pour l'instant nous donnons ces résultats sans preuve, ces formules seront nettement améliorées (et prouvées) dans la suite.

2.3 Les formules de Taylor

La formule de Taylor et ses variantes, sont des formules qui disent que les bonnes fonctions (C^n, par exemple) peuvent être correctement approchées par des polynômes, en tout cas localement près d'un point, et qu'en plus on sait mesurer assez précisément l'erreur que l'on commet en faisant cette approximation.

2.3.1 Un rappel concernant la dérivation

Rappelons un résultat du premier semestre.

Théorème 2.3.1 *Une fonction f définie au voisinage de x_0 est dérivable en x_0 si et seulement si*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)\,,$$

ou encore

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + o(x-x_0)\,.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{x}{n}\right)^n &= e^{n\log(1-\frac{x}{n})}\\
&= e^{n\left(-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&= e^{-x+o(1)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}\,.$$

2.3.2 La formule de Taylor-Young

Lemme 2.3.2 *Soit $k \in \mathbb{N}$ et g une fonction dérivable au voisinage de 0. Si $g'(h) = o(h^k)$ alors $g(h) - g(0) = o(h^{k+1})$.*

Démonstration Par hypothèse $g'(h) = \mathcal{E}(h)h^k$ au voisinage de 0, où $\mathcal{E}$ est une fonction qui tend vers 0 en 0. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour $|h| \leq h_0$ on a $|g'(h)| \leq \varepsilon |h|^k$. Notez qu'alors, pour tout $0 \leq |h'| \leq |h|$ on a du coup $|g'(h')| \leq \varepsilon |h|^k$. Par l'inégalité des accroissements finis on a alors

$$|g(h) - g(0)| \leq \varepsilon |h|^{k+1} .$$

En d'autre termes, la fonction $\widehat{\mathcal{E}}(h) = (g(h) - g(0))/h^{k+1}$ tend vers 0 et donc $g(h) - g(0) = o(h^{k+1})$. □

Théorème 2.3.3 (Formule de Taylor-Young) *Soit f une fonction définie et n fois dérivable au voisinage de x_0. Alors au voisinage de x_0 on*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) .$$

Démonstration Nous le montrons par récurrence sur n. On a vu qu'elle est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie au rang $n - 1$, on l'applique à f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^{n-1}\right) \\ &= f'(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^{n-1}\right) . \end{aligned}$$

On applique le lemme ci-dessus à la fonction

$$g(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k .$$

On a

$$\begin{aligned} g'(h) &= f'(x_0 + h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} h^{k-1} \\ &= f'(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} h^k \\ &= o(h^{n-1}) . \end{aligned}$$

et comme $g(0) = 0$ on conclut que $g(h) = o(h^n)$ par le lemme précédent. □

2.3.3 Développements limités

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 admet un *développement limité à l'ordre n en x_0* si il existe des coefficients $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

au voisinage de x_0.

Attention ! On a vu que l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 est équivalent à la dérivabilité. Cette propriété ne s'étend pas aux ordres supérieurs à 1 : ce n'est pas parce qu'une fonction admet un développement limité à l'ordre n qu'elle est n fois dérivable. Voyons cela sur un exemple.

La fonction $f(x) = |x|^{5/2} \sin(1/x)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et elle vérifie $|f(x)| \leq |x|^{5/2}$. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 par une fonction f telle que $f(0) = 0$. Regardons la dérivabilité en 0. On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|^{5/2}}{x} \sin(1/x)$$

dont la limite est 0 quand x tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour les autres valeurs de x on a

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}\, |x|^{3/2} \sin(1/x) - |x|^{1/2} \cos(1/x) & x > 0\,, \\ -\frac{5}{2}\, |x|^{3/2} \sin(1/x) - |x|^{1/2} \cos(1/x) & x < 0\,. \end{cases}$$

En particulier

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{5}{2}\, |x|^{1/2} \sin(1/x) - \frac{|x|^{1/2}}{x} \cos(1/x)\,.$$

A cause du second terme cette expression n'a pas de limite en 0. Notre fonction n'est pas deux fois dérivable en 0. Pourtant

$$|f(x)| \leq |x|^{5/2}$$

donc

$$f(x) = o(x^2)\,.$$

La fonction f admet bien un développement limité d'ordre 2 en 0.

Revenons sur les développements limités en général. Nous allons démontrer l'unicité du développement limité.

Lemme 2.3.4 *Soit P un polynôme de degré n. Si $P(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0 alors $P = 0$.*

Démonstration Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ le développement de P. Supposons qu'au moins un des a_k est non nul. Soit p le plus petit indice tel que $a_k \neq 0$. Alors en divisant par x^p on a

$$a_p = -\sum_{k=p+1}^{n} a_k x^{k-p} + o(1)\,.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers 0, donc $a_p = 0$. Contradiction. Tous les a_k sont donc nuls. □

Proposition 2.3.5 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. Si il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ tels que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k\,(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k = 0, \ldots, n$.

Démonstration On fait la différence des deux développements et on applique le lemme précédent. □

Le résultat suivant montre que le développement limité de f à l'ordre n est la meilleure approximation de f au voisinage de 0 par un polynôme de degré n.

Proposition 2.3.6 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et possédant un développement limité à l'ordre n en x_0, de la forme $f(x) = P(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$. Alors, pour tout polynôme Q de degré n, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|f(x) - P(x-x_0)| \leq |f(x) - Q(x-x_0)|$$

pour tout x tel que $|x-x_0| \leq \delta$.

Démonstration Si $P = Q$ alors le résultat est évident. On suppose donc $P \neq Q$.

On sait que $|f(x) - P(x-x_0)| = o((x-x_0)^n)$. D'autre part, comme P et Q sont différents on a

$$P(x-x_0) - Q(x-x_0) = a_p(x-x_0)^p + o((x-x_0)^p)$$

pour un $a_p \in \mathbb{R}^*$ et un $p \leq n-1$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} & f(x) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p = \\ & \qquad = f(x) - P(x-x_0) + P(x-x_0) - Q(x-x_0) - a_p(x-x_0)^p \\ & \qquad = o((x-x_0)^p)\,. \end{aligned}$$

Donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$|f(x) - Q(x-x_0)| \geq |a_p(x-x_0)^p| - |o((x-x_0)^p)| \geq \frac{|a_p|}{2}\,|x-x_0|^p$$

pour tout x tel que $|x-x_0| \leq \delta_1$. D'autre part

$$|f(x) - P(x-x_0)| = o((x-x_0)^n) = \mathcal{E}(x)\,|x-x_0|^{n-p}\,|x-x_0|^p$$

donc il existe aussi $\delta_2 > 0$ tel que

$$|f(x) - P(x-x_0)| \leq \frac{|a_p|}{2}\,|x-x_0|^p$$

pour tout x tel que $|x-x_0| \leq \delta_2$. En prenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ on a le résultat annoncé. □

2.3.4 Développement des fonctions usuelles

En application directe de la Formule de Taylor-Young on assez facilement les développements suivants, qu'il faut connaître par coeur.

Théorème 2.3.7 *Au voisinage de 0 on a*

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}\,,$$

autrement dit

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}\,.$$

On a

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k + o(x^n)}\,,$$

autrement dit

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)}.$$

On a

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + o(x^n)},$$

autrement dit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n)}.$$

On a

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1})},$$

autrement dit

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + o(x^{2n+1})}.$$

On a

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+2})},$$

autrement dit

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + o(x^{2n+2})}.$$

On a

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}\, x^{2k} + o(x^{2n+1})},$$

autrement dit

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} + o(x^{2n+1})}.$$

On a

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + o(x^{2n+2})},$$

autrement dit

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + o(x^{2n+2})},$$

2.3.5 Taylor-Lagrange, reste intégral

Sous certaines conditions un peu plus fortes on peut dire plus de choses sur le reste dans la formule de Taylor-Young.

Théorème 2.3.8 (Formule de Taylor-Lagrange) *Si f est C^n sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)\,.$$

Démonstration Soit

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\, f^{(k)}(x) - C\, \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

où C est une constante choisie telle que $g(a) = 0$ (ce qui possible car le facteur devant C est non nul en $x = a$.

On a aussi $g(b) = 0$ clairement. La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) =$. Mais on a aussi

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}\, f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!}\, f^{(k+1)}(x) \right) + \\ &\quad + C\frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= -\frac{(b-x)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(x) + C\frac{(b-x)^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

En particulier

$$0 = g'(c) = -\frac{(b-c)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(c) + C\frac{(b-c)^n}{n!}$$

ce qui donne

$$C = f^{(n+1)}(c)\,.$$

Du coup quand on écrit à nouveau $g(a) = 0$ on obtient la formule annoncée. $\square$

On a du coup une jolie estimation de l'erreur.

Théorème 2.3.9 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Si f est C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors si $f^{(n+1)}$ est bornée sur $]a, b[$ on a*

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|\,.$$

Enfin on termine par une autre formule exacte pour le reste.

Théorème 2.3.10 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ alors*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$

Démonstration La déonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la fonction f est C^1 sur $[a, b]$ et donc

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\, dt\,.$$

Donc l'assertion est vraie.

Supposons-la vraie au rang $n-1$. Nous avons donc

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\, dt\,.$$

On fait une intégration par parties dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\, dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{(n)!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,. \end{aligned}$$

Ce qui permet de terminer la récurrence. $\square$

2.4 Propriétés des développements limités

2.4.1 Opérations sur les développements limités

Proposition 2.4.1 *Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de x_0 qui admettent des développements limitésà l'ordre n et p*

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + o(h^n)\,, \qquad g(x_0+h)=\sum_{k=0}^{p} b_k\, h^k + o(h^p)\,,$$

alors pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ les fonctions $\lambda f+\mu g$ et fg admettent un développement limité à l'ordre $q=\min\{n,p\}$

$$(\lambda f+\mu g)(x_0+h)=\sum_{k=0}^{q}(\lambda a_k+\mu b_k)\, h^k + o(h^q)\,,$$

$$(fg)(x_0+h)=\sum_{k=0}^{q} c_k\, h^k + o(h^q)$$

où

$$c_k=\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}\,.$$

Démonstration Supposons pour simplifier que $n\le p$. On a donc

$$(\lambda f+\mu g)(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)\, h^k + \sum_{k=n+1}^{p} \mu b_k\, h^k + o(h^n)+o(h^p)\,.$$

Les trois derniers termes du membre de droite sont des $o(h^n)$. D'où le résultat pour la somme.

De même pour le produit :

$$f(x_0+h)\, g(x_0+h)=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k\right)\left(\sum_{l=0}^{p} b_l\, h^l\right)+o(h^n)\, g(x_0+h)+o(h^p)\, f(x_0+h)\,.$$

Les fonctions f et g sont continues en x_0 donc bornées au voisinage de x_0, d'où

$$f(x_0+h)\, g(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l\, h^{k+l} + o(h^n)\,.$$

Dans les puissances h^{k+l} qui apparaissent dans la double somme ci-dessus on ne garde que les puissances $\leq n$ et on regroupe

$$f(x_0+h)\,g(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\,h^k + o(h^n)\,.$$

$\square$

Proposition 2.4.2 *Soit g une fonction définie au voisinage de x_0 et f une fonction définie au voisinage de $b = g(x_0)$. Si g admet un développement limité à l'ordre p en x_0 et si f admet un développement limité à l'ordre n en b alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$ obtenu en substituant les développements limités et en tronquant à l'ordre q.*

Démonstration Comme g est continue en x_0 on a $\lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0) = b$. Donc

$$\begin{aligned} f(g(x_0+h)) &= f(b + (g(x_0+h) - b)) \\ &= \sum_{k=0}^{q} a_k (g(x_0+h) - b)^k + o((g(x_0+h) - b)^q) \\ &= \sum_{k=0}^{q} a_k \left(\sum_{l=1}^{q} b_l\,h^l\right)^k + o((h + o(h))^q) \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 2.4.3 *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et admettant un développement limité à l'ordre n et p respectivement. Si $g(x_0) \neq 0$ alors f/g admet un développement limité à l'ordre $q = \min\{n, p\}$.*

Démonstration La fonction $x \mapsto 1/x$ admet un développement limité de tout ordre en tout point $b_0 \neq 0$. Donc par le théorème de composition des développements limités la fonction $1/g$ admet un développement limité en 0, à l'ordre p. Ensuite on applique le résultat sur les produits de développements limités. $\square$

Proposition 2.4.4 *Soit f une fonction dérivable définie au voisinage de x_0 et telle que f' admette un développement limité à l'ordre n*

$$f'(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,h^k + o(h^n)\,.$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k}\, h^k + o(h^{n+1})\,.$$

Démonstration Soit

$$g(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k}\, h^k\,.$$

Par hypothèse

$$g'(h) = f'(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k = o(h^n)\,.$$

On applique alors le lemme 2.3.2. □

Proposition 2.4.5 *Soit f une fonction dérivable définie au voisinage de x_0 admettant un développement limité à l'ordre n*

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + o(h^n)\,.$$

Si f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ alors ce développement est de la forme

$$f'(x_0+h) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, h^{k-1} + o(h^{n-1})\,.$$

Démonstration On applique la proposition précédente à f'. □

Attention ! Notez bien qu'ici on doit supposer l'existence d'un développement limité pour f' car celui-ci n'est pas garanti par l'existence du développement limité de f. Par exemple $f(x) = |x|^{5/2}\sin(1/x)$ est dérivable et admet un développement limité à l'ordre 2. Mais sa dérivée n'admet pas de développement limité à l'ordre 1.

2.4.2 Comportement local près des points critiques

On rappelle que pour une fonction réelle f dérivable, un *point critique* est un point x_0 tel que $f'(x_0) = 0$. Ces points peuvent être de 3 natures différentes : un minimum local, un maximum local, ni l'un ni l'autre (du type x^3 en 0).

Proposition 2.4.6 *Soit f définie au voisinage de x_0. Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 de la forme*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$$

avec $\alpha \neq 0$ et $p \geq 2$. Alors
– si p est impair le point x_0 n'est ni un minimum, ni un maximum,
– si p est pair et $\alpha > 0$ alors x_0 est un minimum local strict,
– si p est pair et $\alpha < 0$ alors x_0 est un maximum local strict.

Démonstration Si p est pair et $\alpha > 0$, alors on a

$$\frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p) \geq 0$$

dès que $|x - x_0|$ est assez petit pour que

$$|o((x - x_0)^p)| \leq \frac{\alpha}{4}(x - x_0)^p .$$

Donc on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p > f(x_0)$$

pour x suffisamment proche de x_0 et différent de x_0. Cela prouve que x_0 est un minimum local.

Le cas $\alpha < 0$ se traite exactement de la même façon.

Dans le cas p impair, supposons $\alpha > 0$ (l'autre cas se traite de manière analogue). De la même façon que ci-dessus on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p > f(x_0)$$

pour x suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$. Mais lorsque $x < x_0$ on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^p < f(x_0) .$$

Ainsi on voit bien que x_0 n'est ni un minimum local, ni un maximum local. □

Proposition 2.4.7 *Soit f définie au voisinage de x_0. Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 de la forme*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p)$$

avec $\alpha \neq 0$ et $p \geq 2$. Alors

– *si* p *est impair le graphe de* f *traverse sa tangente en* $(x_0, f(x_0))$ *(*x_0 *est un point d'inflexion),*

– *si* p *est pair et* $\alpha > 0$ *le graphe de* f *reste localement au-dessus de sa tangente en* $(x_0, f(x_0))$*,*

– *si* p *est pair et* $\alpha < 0$ *le graphe de* f *reste localement en-dessous de sa tangente en* $(x_0, f(x_0))$*.*