T. D.

Exercice 1

1) Montrez que la fonction $f(x) = e^{-1/x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est pas DSE(0).
2) Montrez que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est DSE(0) si et seulement si $\exists M, a > 0$ tels que $\forall n$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M a^n$$

dans un voisinage de 0.

Exercice 2

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ une série entière centrée en a et de RCV R. Montrez que pour tout $r < R$ on a

$$\int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{it} \, dt = 0.$$

Exercice 3

Montrez qu'il n'existe aucune détermination du log continue sur $\mathbb{C}^*$ tout entier.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\cos z = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\sin z = 0$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on définit

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \big(\mathrm{Re}\, f(x+iy), \mathrm{Im}\, f(x+iy)\big) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$$

Montrez que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \\[2mm] \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Exercice 6

Les fonctions $z \mapsto |z|$ est elle $\mathbb{R}$-différentiable en 0 ? Holomorphe en 0 ?

Idem pour $z \mapsto |z|^2$, puis $z \mapsto z^2$.

Calculez $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ pour chacune de ces fonctions.

Exercice 7

Ecrire les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

Exercice 8

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ on pose

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg_p(z)$$

où $\arg_p(z)$ est l'argument principal de z (i.e $\in]-\pi, \pi[$).

Si f est une fonction continue $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin C^1 par morceaux fermé ($\gamma(b) = \gamma(a)$), injectif, parcouru dans le sens trigo, on pose

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

1) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un chemin comme ci-dessus, qui ne passe pas par z_0

a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\int_\gamma (z - z_0)^n\,dz = 0$

b) Montrez que $\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } z_0 \notin \mathring{\gamma} \\ 2i\pi & \text{si } z_0 \in \mathring{\gamma} \end{cases}$

2) Calculez $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2}\,dx$

Exercice 9

Théorème (Morera)

Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue, telle que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$. Alors $f \in H(\Omega)$.

Exercice 10

Théorème (Holomorphie sous l'intégrale)

Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \Omega \times T \to \mathbb{C}$ tq

i) $\forall z \in \Omega$, $t \mapsto f(z,t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

ii) pour presque tout $t \in T$, $z \mapsto f(z,t) \in H(\Omega)$

iii) $\forall K$ compact $\subset \Omega$, il existe $g_K \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tq $|f(z,t)| \leq g_K(t)$ $\forall z \in K$, p.$\forall t \in T$.

Alors $F(z) = \int_T f(z,t)\,d\mu(t) \in H(\Omega)$ et $F'(z) = \int_T \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,d\mu(t)$.

Exercice 11

Théorème (Laurent)

Soit $\Omega = \{z \,/\, a < |z| < b\}$ et $f \in H(\Omega)$. Alors $\exists\, (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tq

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n \quad \forall z \in \Omega$$

avec CVN de la série (indexée par $\mathbb{Z}$) sur tout compact de Ω.

Exercice 12

$D = D(0,1)$

Soit $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe, tq $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D$. Alors

i) $\forall z \in D$, $|f(z)| \leq z$ et $|f'(0)| \leq 1$.

ii) Si il existe $z_0 \in D \setminus \{0\}$ tq $f(z_0) = z_0$, ou si $|f'(0)| = 1$

alors $f = \lambda \, id_D$.

Exercice 13

$a \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{U}$

$$\varphi_{a,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \lambda \dfrac{a - z}{1 - \bar{a} z} \end{array}$$

Thm

L'ens des automorphismes biholomorphes de $\mathbb{D}$ est $\{\varphi_{a,\lambda} \; ; \; a \in \mathbb{D}, \lambda \in \mathbb{U}\}$.

Exercice 14

$f, g \in H(\Omega)$, Ω ouvert connexe.

$fg \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.

Exercice 15

Soit $f \in H(U)$, U ouvert $\supset \overline{D(0,1)}$. Que vaut

$$I = \int_{C(0,1)} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} \, dz.$$

Que vaut $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) \, dt$?

Exercice 16

Corrigé 1

1) Aucun pb hors de 0. Reste à voir en 0.

$f(0) = 0$ par prolongement.

$x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ qui tend vers 0 en 0. Donc par le thm de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Par récurrence, $f^{(n)}(x) = Q_n(x)\, e^{-1/x^2}$ où Q_n = fraction rationnelle. Donc $\lim_0 f^{(n)}(x) = 0$.
Ainsi f est C^∞ en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$.

Si $f(x) = \sum_n a_n x^n$ dans un voisi. de 0, alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ $\forall n$. Impossible.

2) Si f est $C^\infty(\mathbb{R})$ et vérifie l'estimation, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \int_0^x \frac{y^N}{N!} f^{(N+1)}(y)\, dy$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \int_0^{|x|} \frac{|y|^N}{N!} \Pi a^{N+1}\, dy \leq \frac{\Pi (|x| a)^{N+1}}{N!} \underset{N}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la série $\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge, vers $f(x)$.

Inversement, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $D(0,r)$, alors $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}$

$$\sup_{|x|<r} |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |a_n|\, n\cdots(n-k+1) \frac{r^n}{r^k} \leq \frac{1}{r^k} \underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty} n^k |a_n| r^n}_{\text{même RCV que } \sum |a_n| x^n \Rightarrow \text{CV}} = \frac{\Pi}{r^k}.$$

Corrigé 2

Sur $D(a,r)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ et la convergence est normale. La fonction $g(t) = f(a+re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$ est une série de fonctions : $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$, elle est normalement convergente sur $[0,2\pi]$. Donc

$$\int_0^{2\pi} g(t) e^{it}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n (re^{it})^n e^{it}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt}_{=0\ \forall n.} = 0.$$

Corrigé 3

Si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est continue et vérifie $e^{f(z)} = z\ \forall z$, alors $e^{f(e^{it})} = e^{it}\ \forall t \in \mathbb{R}$.

En particulier $|e^{f(e^{it})}| = 1 \Rightarrow f(e^{it}) \in$ Cercle unité.

$e^{it - f(e^{it})} = 0 \Rightarrow it - f(e^{it}) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Cette fonction continue, définie sur un ensemble connexe est à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$ (ens. discret) est donc constante.

La fonction $f(e^{it})$ est 2π-périodique, alors que it ne l'est pas, c'est donc impossible.

Corrigé 4

$\cos(z+z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$ par calcul simple

$\sin(z+z') = \cos(z)\sin(z') + \cos(z')\sin z$

- $\cos(a+ib) = \cos(a)\cos(ib) - \sin(a)\sin(ib) = \cos a\, \mathrm{ch}\, b + i \sin(a)\, \mathrm{sh}\, b$

  $|\cos(a+ib)|^2 = \cos^2 a\, \mathrm{ch}^2 b + \sin^2 a\, \mathrm{sh}^2 b = \cos^2 a (\mathrm{ch}^2 b - \mathrm{sh}^2 b) + \mathrm{sh}^2 b = \cos^2 a + \mathrm{sh}^2 b$

  mais aussi $= \mathrm{ch}^2 b - \sin^2 a$.

  $\cos(a+ib) = 0 \iff \begin{cases} \cos a = 0 \\ \mathrm{sh}\, b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pi/2 + k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \\ b = 0 \end{cases}$

  $\cos z = 0 \iff z = \pi/2 + k\pi.$

- $\sin(a+ib) = i \cos a\, \mathrm{sh}(b) + \mathrm{ch}\, b \sin a$

  $|\sin(a+ib)|^2 = \mathrm{ch}^2 b \sin^2 a + \cos^2 a\, \mathrm{sh}^2 b = \sin^2 a + \mathrm{sh}^2 b$
  $= \mathrm{ch}^2 b - \cos^2 a.$

  $\sin z = 0 \iff \begin{cases} \sin a = 0 \\ \mathrm{sh}\, b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = k\pi \\ b = 0 \end{cases}$

  $\sin z = 0 \iff z = k\pi.$

Corrigé 5

Être $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 pour f c'est :

$$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)\,h + o(h).$$

Être différentiable en (x_0,y_0) pour $\tilde f$ c'est

$$\tilde f(x_0+a, y_0+b) = \tilde f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0)\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} + o((a,b)),$$

où $Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

Donc si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 avec $f'(z_0) = \alpha + i\beta$, on a pour $h = a+ib$

$$\begin{aligned}\tilde f(x_0+a, y_0+b) &= \tilde f(x_0,y_0) + (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a) + o((a,b)) \\ &= \tilde f(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + o((a,b))\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\tilde f$ est différentiable en (x_0,y_0) et que l'on a les relations annoncées sur les $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Tous les arguments se renversent aisément pour la réciproque.

Corrigé 6

- $f(z) = |z|$, $f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, 0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \quad \text{Pas } \mathbb{R}\text{-diff en } 0.$$

$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\ (h\in\mathbb{C}) = \frac{|h|}{h}$ pas de limite en 0. Pas holomorphe en 0.

$$f(z) = (z\bar z)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{z}{(z\bar z)^{1/2}} = \frac{1}{2}\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2}e^{i\arg(z)}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\,2x\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\,2y\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \checkmark$$

- $f(z) = |z|^2 = z\bar z$

  $f(x,y) = x^2+y^2$ $\mathbb{R}$-diff.

  $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = z$ pas holomorphe.

- $f(z) = z^2$

  $f(x,y) = (x^2-y^2) + 2ixy$

  $\mathbb{R}$-diff. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2iy$

  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2ix$

  $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0.$ $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$

  holomorphe.

Corrigé 7

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z}{\partial r} = e^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial z} + e^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \bar z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z}{\partial \theta} = ire^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial z} - ire^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \bar z}$$

$$ir\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial \theta} = ire^{-i\theta}\frac{\partial f}{\partial \bar z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = e^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}e^{i\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

d'où $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0}$

Corrigé 8

1) a) $$\int_\gamma (z-z_0)^n dz = \int_a^b (\gamma(t)-z_0)^n \gamma'(t)\,dt = \left[\frac{(\gamma(t)-z_0)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = 0.$$

b) On veut utiliser le log. Il faut montrer que $\log(\gamma(t))' = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$ (si $\gamma(t)$ évite 0)

Déjà voir que c'est dérivable :

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $\log(\gamma(t)) = \ln|\gamma(t)| + i\arg_p(\gamma(t))$

- $|\gamma(t)|$ est dérivable car on évite 0, donc $\ln|\gamma(t)|$ aussi
- $\arg_p(\gamma(t)) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y(t)}{|\gamma(t)|}\right), & \text{si } x(t) > 0 \\ \arccos\left(\frac{x(t)}{|\gamma(t)|}\right), & \text{si } x(t) < 0,\ y(t) > 0 \\ -\arccos\left(\frac{x(t)}{|\gamma(t)|}\right), & \text{si } x(t) < 0,\ y(t) < 0 \end{cases}$

$$\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}}} \quad \frac{y'\sqrt{x^2+y^2} - y\,\frac{2x'x+2y'y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\;\left(y'(x^2+y^2) - y(\,x'x+y'y)\right)}{|x|\,(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{y'x - yx'}{x^2+y^2}$$

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)' = -\frac{x'y^2 - xy'y}{|y|\,(x^2+y^2)} = \frac{y'x - yx'}{x^2+y^2}$$

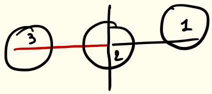
etc...

Pour le calcul de $\ln(\gamma(t))'$ on peut faire brute force. Ou bien remarquer que

$$\exp(\log(\gamma(t)) = \gamma(t)$$

D'où $\log(\gamma(t))' \exp(\log(\gamma(t))) = \gamma'(t)$ i.e $\log(\gamma(t))' = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$.

Ainsi $\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt$: 3 cas

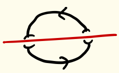


Cas 1 : $= \left[\log(\gamma(t))\right]_a^b = 0$.

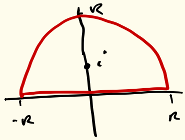
Cas 2 : $= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\log(\gamma(t))\right]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \log(\gamma(b-\varepsilon)) - \log(\gamma(a+\varepsilon))$

(On suppose le paramétrage commence et finit sur $\mathbb{R}^-$, sinon facile de s'y ramener)

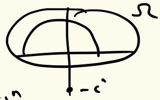
$= 2i\pi$.

Cas 3 :  $\log(\gamma(b-\varepsilon)) - \log\gamma(c+\varepsilon) + \log(\gamma(c-\varepsilon)) - \log(\gamma(a+\varepsilon))$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2i\pi - 2i\pi = 0.$$

2) Regardons $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$ pour  $R>1$.

$\frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}}{z+i}\,\frac{1}{z-i}$. La fonction $\frac{e^{iz}}{z+i}$ est DSE au voisin de tout point de Ω

Si on fait un DSE de $\frac{e^{iz}}{z+i}$ 

autour de i on obtient $\sum_n \alpha_n (z-i)^n$

Du coup $\frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{\alpha_0}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} (z-i)^n$.

$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi\alpha_0$. Comme $\alpha_0 = \frac{e^{i.i}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i} \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi}{e}$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{1+t^2}\,dt + \underbrace{\int_{\frown} \frac{e^{i\gamma(t)}}{1+\gamma(t)^2}\,\gamma'(t)\,dt}_{\beta}.$$

$$|\beta| \le \sup_{\frown}\left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \int_{\frown} |\gamma'(t)|\,dt \le \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{|z|^2-1} \int_0^\pi \left|(Re^{it})'\right| dt \le \frac{1}{R^2-1}\,R\pi \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2}\,dt = \pi/e$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt = \pi/e$

Corrigé 9

Soit V ouvert convexe $\subset \Omega$.

On fait comme dans la preuve de Cauchy local, on construit sur V,

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\omega)\, d\omega$$

et on montre $F \in H(V)$ et $F'(z) = f(z)$ sur V. On sait que F est analytique sur V, donc f aussi, donc $f \in H(V)$. Comme cela est vrai pour tout convexe $V \subset \Omega$, alors $f \in H(\Omega)$.

Corrigé 10

$F(z) = \int_T f(z,t)\, d\mu(t)$.

Soit Δ triangle $\subset \Omega$, alors $\int_{\partial\Delta} F(z)\, dz = \int_{\partial\Delta} \int_T f(z,t)\, d\mu(t) . dz$

$$\int_T \int_{\partial\Delta} |f(z,t)|\, dz\, d\mu(t) \leq \int_T g_\Delta(t)\, \mathrm{long}(\partial\Delta)\, dt < \infty.$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \int_{\partial\Delta} F(z)\, dz = \int_T \int_{\partial\Delta} f(z,t)\, dz\, d\mu(t) = \int_T 0\, d\mu(t) \quad \text{car } f(\cdot,t) \in H(\Omega)$$
$$= 0.$$

Par Morera $F \in H(\Omega)$.

$$F'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D(z,r)} \frac{F(\omega)}{(\omega - z)^2}\, d\omega = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,r)} \int_T \frac{f(\omega,t)}{(\omega - z)^2}\, d\mu(t)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_T \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\omega,t)}{(\omega - z)^2}\, d\omega\, d\mu(t) \quad (\text{idem par Fubini})$$

$$= \int_T \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\, d\mu(t).$$

Corrigé 11

Soit $a<r<b$, la fonction 2π-périodique $\theta \longmapsto f(re^{i\theta})$ est C^2. Elle se développe en séries de Fourier:

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r)\, e^{in\theta} \quad \text{avec} \quad c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

$$c_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\, e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\,\frac{-i}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} F(r,\theta)\, e^{-in\theta} d\theta$$

$$= \frac{-i}{2\pi r}\left(\Big[F(r,\theta)\Big]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} F(r,\theta)\, e^{-in\theta} d\theta\right)$$

$$= \frac{n}{2\pi r}\int_0^{2\pi} F(r,\theta)\, e^{-in\theta} d\theta = \frac{n}{r} c_n(r). \qquad , n\in\mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow c_n(r) = c_n r^n \quad , n\in\mathbb{Z}.$$

Corrigé 12

i) $\exists\, g$ holom sur D tq $f(z) = z\,g(z)$. Si $|z| = 1/r \Rightarrow |g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r}$

Principe du maximum: $\sup_{|z|\le r} |g(z)| \le \frac{1}{r}$.

$$r \to 1- \Rightarrow \sup_D |g(z)| \le 1$$

$$\Rightarrow |f(z)| \le z.$$

$$f'(z) = g(z) + z\,g'(z) \Rightarrow f'(0) = g(0) \text{ et } |f'(0)| \le 1$$

ii) Si $z\in D\setminus\{0\}$ est tq $|f(z_0)| = |z_0|$ alors $|g(z_0)| = 1$. Comme $|g|\le 1$ sur $D \Rightarrow g$ est constant sur D.

i.e. $f(z) = \lambda z$.

Corrigé 13

$\Leftarrow$ $\varphi_{a,\lambda}$: • bien défini : car si $a \in \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{D}$ $1 - \bar{a}z \neq 0$

• $\varphi_{a,\lambda} \subset \mathbb{D}$: $1 - \left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \dfrac{1 - 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}z) + |a|^2|z|^2 - |a|^2|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}z)}{|1-\bar{a}z|^2}$

$$= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0. \checkmark$$

• $w = \lambda \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z} \iff (1-\bar{a}z)\bar{\lambda}w = a - z$

$\iff z = \dfrac{a - \bar{\lambda}w}{1 - \bar{a}\bar{\lambda}w}$

$\varphi_{a,\lambda}$ holom et $\in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow$: Soit $\psi \in \mathcal{A}$ et $a = \psi^{-1}(0) \in \mathbb{D}$. Soit $\tilde{\psi} = \psi \circ \varphi_{a,1}$

$\tilde{\psi}(0) = \psi(\varphi_{a,1}(0)) = \psi(a) = 0.$

$\tilde{\psi}$ holom, $\tilde{\psi}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ donc (ex 12) : $|\tilde{\psi}(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

$\tilde{\psi}^{-1}(0) = 0$, $\tilde{\psi}^{-1}$ holom. et $\tilde{\psi}^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ $\Rightarrow$ $|z| \leq |\tilde{\psi}(z)|$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Finalement $|\tilde{\psi}(z)| = |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$

Ex 12 $\Rightarrow$ $\tilde{\psi} = \lambda\, id$ $\Rightarrow$ $\psi = \lambda\, \varphi_{a,1}^{-1} = \varphi_{a,\lambda}$.

Corrigé 14

Principe des zéros isolés : Si $\exists z_0 \in \Omega$ tq $f(z_0) \neq 0$, alors $\exists D(z_0, r)$ tq $f \neq 0$ sur ce disque
$\Rightarrow g \equiv 0$ sur ce disque. $\Rightarrow g \equiv 0$ sur Ω par prolongement analytique.

Corrigé 15

$$I = 2\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz + \int_C f(z)\,dz + \int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2i\pi\left(2f(0) + 0 + f'(0)\right)$$

$$I = \int_0^{2\pi} (2 + e^{it} + e^{-it})\, f(e^{it})\, i\,dt = 4i\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\,dt = \frac{\pi}{2}\left(2f(0) + f'(0)\right)$$