TD Transf Fourier

Exercice 1

Pour $f(x) = e^{-x^2}$, calculez $\hat{f}$.

Exercice 2

L'objectif est de calculer $\hat{f}$ pour $f(x) = \operatorname{sinc}^2(x)$.

1) Montrez que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin x/2}\right)^2 e^{-ikx}\,dx = \left(1 - \frac{|k|}{2N+2}\right)^+$$

2) Montrez que

$$\lim_{N\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin(N+1)x}{\sin x/2}\right)^2 e^{-ikx}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin(N+1)x}{x/2}\right)^2 e^{-ikx}\,dx\right| = 0 \text{ unif en } k.$$

3) Montrez que $\hat{f}(\xi) = \pi\left(1 - \frac{|\xi|}{2}\right)^+$.

Exercice 3

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \neq 0$. Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = \frac{n f(nx)}{\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt}$ alors (f_n) est une approximation de l'unité.

2) Pour tout $R \geq 1$, il existe une fonction $\chi_R \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ tq

a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \chi_R(t) \leq 1$

b) $\forall t \in [-R, R]$, $\chi_R(t) = 1$

c) $\forall |t| \geq R+1$, $\chi_R(t) = 0$

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, il existe une suite $(f_n) \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ tel que

a) si $f \in L^q(\mathbb{R})$, $1 \leq q < \infty$, $\|f_n\|_q \leq \|f\|_q$ et $\|f_n - f\|_q \xrightarrow[n]{} 0$

b) si $f \in C_0^0(\mathbb{R})$, alors $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$.

Exercice 4

Quelle fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} f(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{x^2+1}$ $\forall x$?

Exercice 5

Calculez $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}\, dx$

Exercice 6

Quel $u \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s)\, ds \qquad (\beta > 0)$$

Exercice 7

Soit $g_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$ et $h = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

a) Calculez explicitement $g_n * h$.

b) Montrez que $g_n * h = \hat{f}_n$ où $f_n(x) = \frac{2}{\pi x^2} \sin(nx) \sin x$.

c) Montrez que $\|f_n\|_1 \to +\infty$

d) Montrez que $\mathcal{F} : L^1 \to C_0^0$ n'est pas surjective.

e) Montrez que $\mathcal{F}(L^1)$ est dense dans C_0^0.

Exercice 8

Calculez $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ et $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx$.

Exercice 9

Mq si $f, g \in L^2$ alors $f*g \in C_0^0$., $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

Mq $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = 2\pi \widehat{fg}$

$f_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin ax}{x}$. Calculez $f_a * f_b$, $a, b > 0$.

Combien y-a t'il de solution à $f*f = f$ dans L^2 ?

Exercice 10

1) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $\mathcal{F}(\tau_x f)(\xi) = e^{-i\xi y} \mathcal{F}(f)(\xi)$

2) Montrez que si $\mathcal{F}(f) = 0$ sur un ens. A de mesure >0, alors $\exists\, g \neq 0 \in \mathrm{vect}\{\tau_x f, x \in \mathbb{R}\}^\perp$

En déduire que $\mathrm{vect}\{\tau_x f, x \in \mathbb{R}\}$ dense $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(f)$ presque jamais nulle.

3) Réciproquement, montrez que si $\mathcal{F}(f)$ p.p. $\neq 0$ alors $\{\tau_x f ; x \in \mathbb{R}\}$ est dense.

Exercice 11

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on pose

$$Pf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin y}{y} \, dy$$

1) Montrez que Pf est bien définie et continue.

2) Montrez que $Pf \in L^2$

3) Montrez que $\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2$ et que $\begin{cases} P \circ P = P. \\ P^* = P \end{cases}$

Exercice 12

$q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$, $t > 0$.

Montrez que $q_t * q_s = q_{t+s}$

Corrigé 1

Clairement $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On a $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\xi x}\, dx$.

$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{-x^2} e^{-i\xi x}\right) = -ix\, e^{-x^2} e^{-i\xi x}$, $\left|\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{-x^2} e^{-i\xi x}\right)\right| \leq |x| e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Donc par thm de dérivation sous $\int$, on a $\hat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix\, e^{-x^2} e^{-i\xi x}\, dx = \left[\frac{i}{2} e^{-x^2} e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(-i\xi) e^{-i\xi x}\, dx$

$$= -\frac{\xi}{2}\hat{f}(\xi).$$

Donc $\hat{f}$ est solution de $y' = -\frac{x}{2} y$, i.e. $y = y(0) e^{-x^2/4}$

$y(0) = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}}$$

Corrigé 2

1) $F_N = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j$, $F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((N+1)\, x/2)}{\sin x/2} \right)^2$

$F_N * e_k = \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)^+ e_k$.

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2} \left(\frac{\sin(N+1)x}{\sin x/2} \right)^2 e^{-ikx} dx = \left(1 - \frac{|k|}{2N+2}\right)^+$

$(N = 2N+1)$

2) La fonction $g(x) = \frac{1}{(\sin x/2)^2} - \frac{1}{(x/2)^2}$ est continue sur $[-\pi,\pi] \setminus \{0\}$

En 0, on fait un D.L.

$g(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^4)\right)^2} - \frac{1}{x^2/4} = \frac{1}{x^2/4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{24} + o(x^3)\right)^2} - 1 \right]$

$= \frac{1}{x^2/4} \left[\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} - 1 \right] = \frac{1}{x^2/4} \left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3) - 1\right) = \frac{1}{3} + o(x).$

Donc g se prolonge par continuité en 0.

$\frac{1}{2\pi} \left| \int - \int \right| \leq \frac{1}{2N+2} \|g\|_1$ converge vers 0, unif. en k.

3) Soit $k_N = \lfloor (N+1) u \rfloor$, alors

$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2} \left(\frac{\sin(N+1)x}{\sin x/2} \right)^2 e^{-ik_N x} dx = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{|k_N|}{2N+2}\right)^+ = \left(1 - \frac{|u|}{2}\right)^+$;

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2} \left(\frac{\sin(N+1)x}{x/2} \right)^2 e^{-ik_N x} = \int_{-\pi(N+1)}^{\pi(N+1)} \frac{2}{(2N+2)^2} \left(\frac{\sin t}{t/(2N+2)} \right)^2 e^{-it \frac{k_N}{N+1}} dt$

$= 2 \int_{-\pi(N+1)}^{\pi(N+1)} (\operatorname{sinc} t)^2 e^{-it \frac{k_N}{N+1}} dt$

$\xrightarrow[N]{} 2 \hat{f}(u)$

D'où $\hat{f}(u) = \pi \left(1 - \frac{|u|}{2}\right)^+$.

Corrigé 3

1) • $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ ✓

• $\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_1 < \infty$: $\|f_n\|_1 = \frac{1}{|\int f|} \int_{\mathbb{R}} n|f(nx)|\,dx = \frac{\|f\|_1}{|\int f|}$ ✓

• $\forall \delta > 0$, $\lim_n \int_{\mathbb{R}\setminus[\delta,\delta]} |f_n(t)|\,dt = 0$: $\int_\delta^\infty n f(nx)\,dx = \int_{n\delta}^\infty f(y)\,dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car reste d'une intégrale convergente

2) • $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ >0 & x>0. \end{cases}$ Par exemple $\begin{cases} e^{-1/x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

• $\exists g$ C^∞ croissante $\begin{cases} =0 & x\le 0 \\ =1 & x \ge 1 \end{cases}$: $h(x) = f(x)f(1-x)$ est C^∞, $\begin{cases} >0 & 0<x<1 \\ =0 & \text{sinon}. \end{cases}$

$H(x) = \int_0^x h(s)\,ds$ est C^∞, $\begin{cases} =0 & x \le 0 \\ \nearrow & \\ \text{cste} > 0 & x \ge 1 \end{cases}$. On prend $g(x) = \frac{H(x)}{H(1)}$.

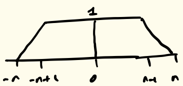
• $g(R+1-x) = \begin{cases} 0 & x \ge R+1 \\ 1 & x \le R \end{cases}$

$g(R+1+x) = \begin{cases} 0 & x < -(R+1) \\ 1 & x \ge -R \end{cases}$ on prend $g(x+R+1)\,g(R+1-x)$.

3) $\varphi = \frac{\chi_1}{\|\chi_1\|_1}$ où χ_1 vient du 2) pour $R=1$.

$\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ est à support dans $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et $(\varphi_n)_n$ approx unité.

Soit 1_n =



$f_n = \varphi_n * (1_n f)$. Alors $f_n \in C_K^\infty$, car φ_n et $1_n f$ sont à supp. cpct : $\left(\int_{-A}^{A} g(t) \underbrace{f(x-t)}_{0 \text{ si } x-A>R \text{ etc}\dots} dt \right)$

$\|f_n\|_q \le \|\varphi_n\|_1 \|f 1_n\|_q \le \|f 1_n\|_q \le \|f\|_q$

$\|f - f_n\|_q \le \|f - \varphi_n * f\|_q + \|\varphi_n * (f - f 1_n)\|_q \le \|f - \varphi_n * f\|_q + \|\varphi_n\|_1 \|f - f 1_n\|_q$

$\le \underbrace{\|f - \varphi_n * f\|_q}_{\substack{\to 0 \\ \text{car approx unité}}} + \underbrace{\|f - f 1_n\|_q}_{\substack{\to 0 \\ \text{cv dom.}}}$

Si $f \in C_0^0$: $\|f - f_n\|_\infty \le \underbrace{\|f - \varphi_n * f\|_\infty}_{\substack{\to 0 \\ \text{approx unité}}} + \underbrace{\|f - f 1_n\|_\infty}_{\to 0}$ car $\le \sup_{|x| \ge n-1} |f(x)| \to 0$ car $f \xrightarrow[\infty]{} 0$.

Corrigé 4

On reconnait $f*f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Comme $f \in L^1$, alors $f*f$ aussi. On a donc

$$\underbrace{\widehat{f*f}(\xi)}_{=\,\hat{f}(\xi)^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}\,dx.$$

On a vu que la transformée de Fourier de $e^{-|x|}$ était $\frac{2}{1+x^2}$. Mais $e^{-|x|} \in A(\mathbb{R})$ donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2}\,dx = \pi\left(\frac{1}{2\pi}\overset{\vee}{\frac{2}{1+x^2}}\right)(-\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

D'où $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-|\xi|/2}$. Par Fourier inverse $f(x) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\pi}} \frac{2\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+x^2} = \frac{\pm 2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+4x^2}$

Corrigé 5

- $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable en $+\infty$ car $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
  et $\sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en 0 donc intégrable en 0.

- $it\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx} = i\sqrt{t}\,e^{-t}e^{itx}$

  $|i\sqrt{t}\,e^{-t}e^{itx}| = \sqrt{t}\,e^{-t}$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

- $$f'(x) = \int_0^\infty i\sqrt{t}\,e^{-t}e^{itx}\,dt = \int_0^\infty i\sqrt{t}\,e^{t(ix-1)}\,dt = \cancel{\left[i\sqrt{t}\,\frac{e^{t(ix-1)}}{ix-1}\right]_{-\infty}^{+\infty}} - \frac{i}{2(ix-1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$f' = \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)}f = \frac{-x+i}{2(x^2+1)}f$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)} \qquad \ln|f| = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{i}{2}\arctan x + K$$

$$f(x) = C\,(x^2+1)^{-1/4}\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right)$$

$$C = f(0) = \underset{t=u^2}{\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt} = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

Corrigé 6

$f(x) = e^{-|x|}$, $\hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$

$$u = f + \beta f * u \Rightarrow \hat{u} = \hat{f} + \beta \hat{f}\hat{u} \Rightarrow \hat{u} = \frac{\hat{f}}{1-\beta\hat{f}} = \frac{2}{(1-2\beta)+\xi^2}$$

Si $1-2\beta \leq 0$ (i.e. $\beta \geq 1/2$) cette fonction n'est pas continue car dénominateur s'annule.

Si $0 < \beta < \frac{1}{2}$

$$\hat{u} = \frac{1}{1-2\beta} \frac{2}{1+\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-2\beta}}\right)^2} = \frac{1}{1-2\beta} \hat{f}\left(\xi/\sqrt{1-2\beta}\right)$$

$$u = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{u}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2\beta} \widehat{\hat{f}\left(\xi/\sqrt{1-2\beta}\right)}(-x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2\beta} \sqrt{1-2\beta}\, \hat{\hat{f}}\left(-\sqrt{1-2\beta}\,\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}} e^{-\sqrt{1-2\beta}\,|\xi|}$$

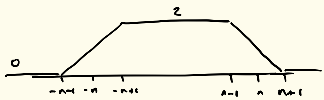
Corrigé 7

a) $g_n * h(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(y)\, h(x-y)\, dy = \int_{-n}^{n} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(y)\, \mathbb{1}_{[x-1,x+1]}(y)\, dy$

$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-n,n] \cap [x-1,x+1]}(y)\, dy$

- Si $[-n,n] \cap [x-1,x+1] = \emptyset$: i.e, $x < -n-1$ ou $x > n+1$. $\longrightarrow 0$
- Si $[x-1,x+1] \subset [-n,n]$, i.e $x \in [-n+1, n-1]$: $\longrightarrow 2$
- Si $x \in [-n-1, -n+1]$: $x+1+n$

  Si $x \in [n-1, n]$: $n-x+1$



b) $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\right) = \dfrac{2\sin(ax)}{x}$

$\mathcal{F}(g_n * h) = \hat{g}_n \hat{h} = \dfrac{4}{x^2} \sin(nx) \sin x = h_n(x)$

Mais $\mathcal{F}(g_n * h) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \underset{(x)}{g_n * h} = \dfrac{1}{2\pi} \hat{h}_n(-x) = \dfrac{2}{\pi} \widehat{\dfrac{\sin nx \sin x}{x^2}}(-x)$

$\hat{f}(-x) = \hat{f}(x)$ si f paire : $\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{ixy}\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(-y)\, e^{-ixy}$

c) $\|f_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{|\sin nx \sin x|}{x^2}\, dx \geq c \int_0^{\pi/2} \dfrac{|\sin nx|}{x}\, dx = \int_0^{n\pi/2} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| dx. \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$

$\left[\int_0^{\infty} \dfrac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} " \right.$

$\left. \geq \dfrac{1}{\pi(k+1)} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin t|\, dt = \dfrac{2}{\pi(k+1)} \right]$

$\underline{\Sigma\, \infty}$

$\sin t \geq \dfrac{2t}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$

$\cos t - 2/\pi$ 0 0

$-\sin t$ $-$

d) $\mathcal{F}$ est inj. Si $\mathcal{F}$ surj $\Rightarrow \mathcal{F} : (L^1, \|\,\|_1) \longrightarrow (C^0_0, \|\,\|_\infty)$ bij, cont. $\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}$ cont.

$\Rightarrow \exists C \,/\, \|f\|_1 \leq c\, \|\hat{f}\|_\infty.\ \forall f.$

$\|\hat{f}_n\|_\infty = \|g_n * h\|_\infty = 2$, $\|f_n\|_1 \to \infty$ impossible.

e) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

Corrigé 8

La fonction 

$= f$ a pour $\hat{f}(x) = \dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}$

$$\hat{f} \in L^1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\,dx = \hat{\hat{f}}(0) = 2\pi f(0) = 2\pi$$

$$\overset{\parallel}{2\int_0^\infty \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\,dx} = 4\int_0^\infty \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = \frac{\pi}{2}.$$

$f \in L^2$, Plancherel: $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$

$$2\int_0^\infty \frac{\sin^4 x/2}{(x/2)^4} = 4\pi \int_0^1 (1-x)^2\,dx$$

$$4\int_0^\infty \frac{\sin^4 y}{y^4}\,dy = 4\pi \left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4} = \pi/3.$$

Corrigé 9

- $\left|\int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|^2 dy\right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2 .$

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

- $(f_n), (g_n) \subset C_K^\infty$ $\quad f_n \xrightarrow{L^2} f$, $\quad g_n \xrightarrow{L^2} g$

$f_n * g_n$ est alors C_K^∞ . ✓

$\|f_n * g_n - f*g\|_\infty \leq \|f_n*(g_n-g)\|_\infty + \|(f_n-f)*g\|_\infty \leq \|f_n\|_2 \|g_n-g\|_2 + \|f_n-f\|_2 \|g\|_2 \to 0.$

$\Rightarrow f*g \in C_0^0$. ✓

- $\|\mathcal{F}(f)*\mathcal{F}(g) - 2\pi \widehat{fg}\|_\infty \leq \|\mathcal{F}(f)*\mathcal{F}(g-g_n)\|_\infty + \|\mathcal{F}(f-f_n)*\mathcal{F}(g_n)\|_\infty + 2\pi \|\widehat{f_n g_n} - \widehat{f_n g}\|_\infty$
$+ 2\pi \|\widehat{f_n g} - \widehat{fg}\|_\infty$

$\left(\hat{f}_n * \hat{g}_n = 2\pi \widehat{f_n g_n}\right)$

$\leq \|\mathcal{F}(f)\|_2 \|\mathcal{F}(g-g_n)\|_2 + \|\mathcal{F}(f-f_n)\|_2 \|\mathcal{F}(g_n)\|_2 + 2\pi \|f_n(g-g_n)\|_1 + 2\pi \|(f_n-f)g\|_1$

$\leq \|f\|_2 \|g-g_n\|_2 + \|f-f_n\|_2 C + 2\pi \|f_n\|_2 \|g-g_n\|_2 + 2\pi \|f_n-f\|_2 \|g\|_2$ etc...

- $g_a = \frac{1}{2\pi} 1\!\!1_{[-a,a]} \Rightarrow \hat{g}_a = \frac{1}{\pi} \frac{\sin ax}{x} = f_a$

$f_a * f_b = \mathcal{F}(g_a) * \mathcal{F}(g_b) = 2\pi \widehat{g_a g_b} = \widehat{g_{a\wedge b}} = f_{a\wedge b}$

- $f_a * f_a = f_a \quad \forall a.$

Corrigé 10

1) La formule est vraie pour $f \in L^1 \cap L^2$. Pour $f \in L^2$ on prend $(f_n) \subset L^1 \cap L^2 \xrightarrow{L^2} f$.

τ_x est continue $L^2 \to L^2$: $\|\tau_x f\|_2 = \|f\|_2$; $\mathcal{F}$ est aussi continue $L^2 \to L^2$.

2) Soit $g_1 \neq 0$, nulle hors de A, et $g_1 \in L^2$. Alors, $\forall h = \sum_j \lambda_j \tau_{x_j} f \in \mathrm{vect}\{\tau_x f ; x \in \mathbb{R}\}$, on a

$$\langle g_1, \mathcal{F}(h) \rangle = \sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}} \overline{g_1}(y)\, e^{-i x_j y}\, \mathcal{F}(f)(y)\, dy = 0.$$

Mais $g_1 \in L^2 \Rightarrow g_1 = \mathcal{F}(g) \Rightarrow \langle \mathcal{F}(g), \mathcal{F}(h) \rangle = 0 \Rightarrow \langle g, h \rangle = 0$. Ainsi $g \in \mathrm{vect}^\perp$ et $\mathrm{vect}^\perp \neq \{0\}$. Non dense.

3) Si $g \in \mathrm{vect}^\perp \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}(g)}(y)\, \mathcal{F}(f)(y)\, e^{-ixy}\, dy = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

i.e. $\widehat{\overline{\mathcal{F}(g)}\, \mathcal{F}(f)} = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{F}(g)}\, \mathcal{F}(f) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(g) = 0.$

Corrigé 11

1) Convolution $L^2 * L^2$.

2) $\frac{1}{\pi}\frac{\sin y}{y}$ et $f \in L^2 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\frac{\sin y}{y} = \mathcal{F}(h)$ et $f = \mathcal{F}(g)$

$$Pf = \frac{1}{\pi}\frac{\sin y}{y} * f = \mathcal{F}(h) * \mathcal{F}(g) = 2\pi\,\widehat{hg}$$

Mais $h(y) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-1,1]}$, bornée, donc $hg \in L^1 \cap L^2$

Donc $Pf = 2\pi\,\mathcal{F}(hg) \in L^2$.

3) $\|Pf\|_2 = 2\pi\,\|\mathcal{F}(gh)\|_2 = (2\pi)^{3/2}\|gh\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\,\|g\|_2 = \|f\|_2$

$$P \circ P(f) = P\big(2\pi\,\mathcal{F}(gh)\big) = 4\pi^2\,\mathcal{F}(gh^2) = 2\pi\,\mathcal{F}(gh) = P(f).$$

Si $k = \mathcal{F}(\ell) \in L^2$, $\langle k \mid Pf\rangle = 2\pi\langle \mathcal{F}(\ell), \mathcal{F}(hg)\rangle = 2\pi\langle \ell, hg\rangle = 2\pi\langle \bar{h}\ell, g\rangle$

$= 2\pi\langle h\ell, g\rangle = \langle 2\pi\mathcal{F}(h\ell), \mathcal{F}(g)\rangle = \langle Pk \mid f\rangle.$

$P^* = P$.

Corrigé 12

$$\hat{q}_t(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\pi t}} 2\sqrt{t} \; e^{-x^2 4t/4} = e^{-x^2 t}$$

$$\hat{q}_t \cdot \hat{q}_s(x) = e^{-x^2(t+s)} = \hat{q}_{t+s}(x).$$

$$\widehat{q_t * q_s} = \hat{q}_t \hat{q}_s = \widehat{q_{t+s}} \Rightarrow q_t * q_s = q_{t+s}.$$