Le hasard vu par un mathématicien

Guillaume AUBRUN

Université Lyon 1, France

« Plan » de l'exposé

1. Promenade au pays du hasard
2. Les théorèmes du hasard
3. La méthode probabiliste : le hasard au service du mathématicien

Promenade au pays du hasard

Le hasard

Qu'est-ce que le hasard ?

Le hasard, c'est l'imprévisibilité, l'absence de règle qui permet de deviner à l'avance le résultat, même partiellement.

Le hasard

Qu'est-ce que le hasard ?

Le hasard, c'est l'imprévisibilité, l'absence de règle qui permet de deviner à l'avance le résultat, même partiellement.

Cette suite de chiffres a toutes les apparences d'une suite aléatoire

$$31415926535897932384626433832795028841971693993751058209 74$$

Le hasard

Qu'est-ce que le hasard ?

Le hasard, c'est l'imprévisibilité, l'absence de règle qui permet de deviner à l'avance le résultat, même partiellement.

Cette suite de chiffres a toutes les apparences d'une suite aléatoire

$$31415926535897932384626433832795028841971693993751058209 74$$

Ce sont en fait les décimales de π, qui sont complètement prévisibles !

Le hasard

Qu'est-ce que le hasard ?

Le hasard, c'est l'imprévisibilité, l'absence de règle qui permet de deviner à l'avance le résultat, même partiellement.

Cette suite de chiffres a toutes les apparences d'une suite aléatoire

$$31415926535897932384626433832795028841971693993751058209 74$$

Ce sont en fait les décimales de π, qui sont complètement prévisibles !

Et celle-là ?

$$03183098861837906715377675267450287240689192914809128974 95$$

Le hasard

Qu'est-ce que le hasard ?

Le hasard, c'est l'imprévisibilité, l'absence de règle qui permet de deviner à l'avance le résultat, même partiellement.

Cette suite de chiffres a toutes les apparences d'une suite aléatoire

$$31415926535897932384626433832795028841971693993751058209 74$$

Ce sont en fait les décimales de π, qui sont complètement prévisibles !

Et celle-là ?

$$03183098861837906715377675267450287240689192914809128974 95$$

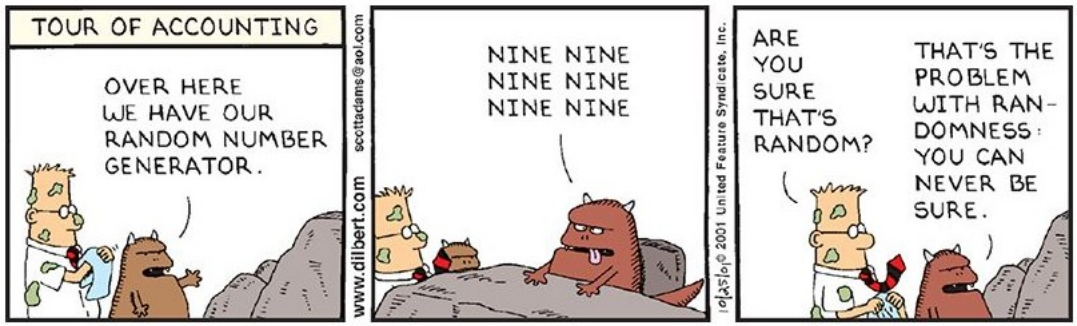
Ce sont les décimales de $1/\pi$...

Identifier le hasard

Comment savoir si une suite de nombres a été choisie au hasard ?

Identifier le hasard

Comment savoir si une suite de nombres a été choisie au hasard ?



Un traitement mathématique rigoureux du hasard nécessite de considérer simultanément l'ensemble de toutes les possibilités.

Néanmoins, si on observe un motif simple improbable, c'est suspect !

Histoire du hasard en mathématiques

Jérôme Cardan, XVIè siècle : premières considérations rigoureuses sur le hasard.

Histoire du hasard en mathématiques

Jérôme Cardan, XVIè siècle : premières considérations rigoureuses sur le hasard.

On fait la somme de 3 dés. Est-il plus probable d'obtenir 9 ou 10 ?

Histoire du hasard en mathématiques

Jérôme Cardan, XVIè siècle : premières considérations rigoureuses sur le hasard.

On fait la somme de 3 dés. Est-il plus probable d'obtenir 9 ou 10 ?

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$

$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+3+2 = 5+4+1 = 4+4+2 = 4+3+3$$

Histoire du hasard en mathématiques

Jérôme Cardan, XVIè siècle : premières considérations rigoureuses sur le hasard.

On fait la somme de 3 dés. Est-il plus probable d'obtenir 9 ou 10 ?

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$

$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+3+2 = 5+4+1 = 4+4+2 = 4+3+3$$

Donc 9 et 10 sont équiprobables.

Histoire du hasard en mathématiques

Jérôme Cardan, XVIè siècle : premières considérations rigoureuses sur le hasard.

On fait la somme de 3 dés. Est-il plus probable d'obtenir 9 ou 10 ?

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$

$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+3+2 = 5+4+1 = 4+4+2 = 4+3+3$$

Donc 9 et 10 sont équiprobables.

Cardan explique pourquoi ce raisonnement est faux !

Histoire du hasard en mathématiques

Jérôme Cardan, XVIè siècle : premières considérations rigoureuses sur le hasard.

On fait la somme de 3 dés. Est-il plus probable d'obtenir 9 ou 10 ?

$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$$

$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+3+2 = 5+4+1 = 4+4+2 = 4+3+3$$

Donc 9 et 10 sont équiprobables.

Cardan explique pourquoi ce raisonnement est faux !

Un siècle plus tard, correspondance entre Pascal et Fermat.
Un jeu de hasard est interrompu prématurément, comment répartir équitablement la mise entre les joueurs ?

Le hasard dans les maths modernes

L'axiomatisation des probabilités est due au mathématicien russe Andreï Kolmogorov (1903–1987). L'école française a joué un rôle majeur dans la deuxième partie du XXè siècle.

Le hasard dans les maths modernes

L'axiomatisation des probabilités est due au mathématicien russe Andreï Kolmogorov (1903–1987). L'école française a joué un rôle majeur dans la deuxième partie du XXè siècle.

Néanmoins, jusqu'à récemment, les probabilités ont été considérées comme une branche marginale des mathématiques pures.

Le hasard dans les maths modernes

L'axiomatisation des probabilités est due au mathématicien russe Andreï Kolmogorov (1903–1987). L'école française a joué un rôle majeur dans la deuxième partie du XXè siècle.

Néanmoins, jusqu'à récemment, les probabilités ont été considérées comme une branche marginale des mathématiques pures.

Première médaille Fields attribuée à un probabiliste : il faut attendre 2006 (Wendelin Werner).

Comment générer du hasard ?

L'être humain est mauvais pour choisir au hasard.

Comment générer du hasard ?

L'être humain est mauvais pour choisir au hasard.

Example : l'oracle de Aaronson — cliquer ici pour essayer

Comment générer du hasard ?

L'être humain est mauvais pour choisir au hasard.

Example : l'oracle de Aaronson — cliquer ici pour essayer

On arrive assez bien à faire en sorte que la proportion de $\leftarrow$ et de $\rightarrow$ soit de 50% / 50%.

Comment générer du hasard ?

L'être humain est mauvais pour choisir au hasard.

Example : l'oracle de Aaronson — cliquer ici pour essayer

On arrive assez bien à faire en sorte que la proportion de $\leftarrow$ et de $\rightarrow$ soit de 50% / 50%.

Mais il faut plus que ça!!! Par exemple la suite

$$\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow$$

est complètement prévisible, bien que la proportion soit parfaitement respectée.

Comment générer du hasard ?

L'être humain est mauvais pour choisir au hasard.

Example : l'oracle de Aaronson — cliquer ici pour essayer

On arrive assez bien à faire en sorte que la proportion de $\leftarrow$ et de $\rightarrow$ soit de 50% / 50%.

Mais il faut plus que ça!!! Par exemple la suite

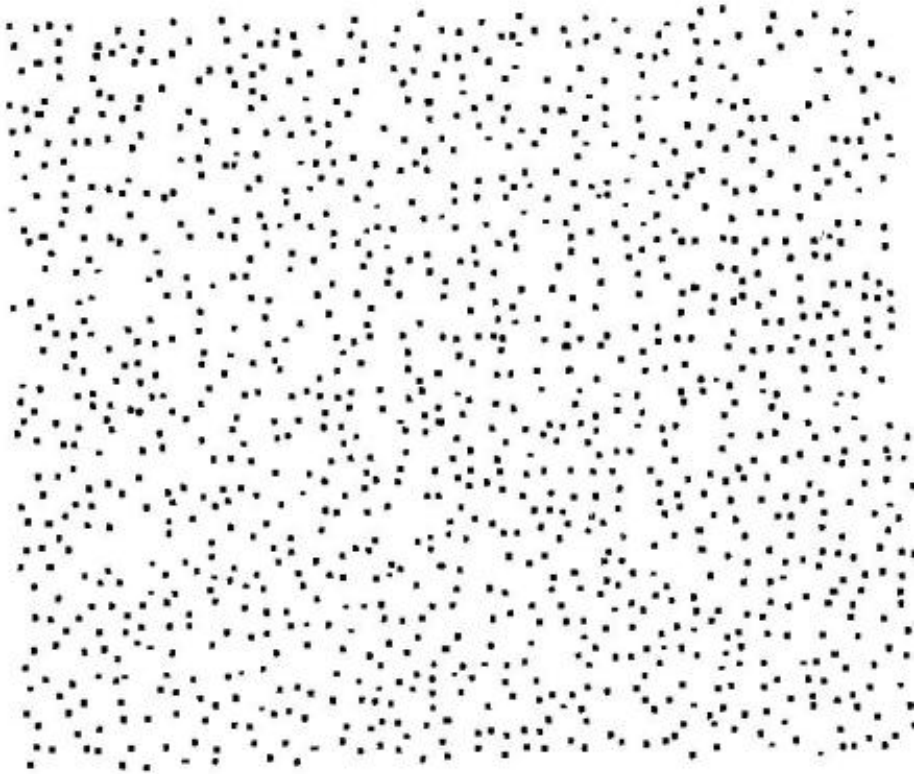
$$\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow$$

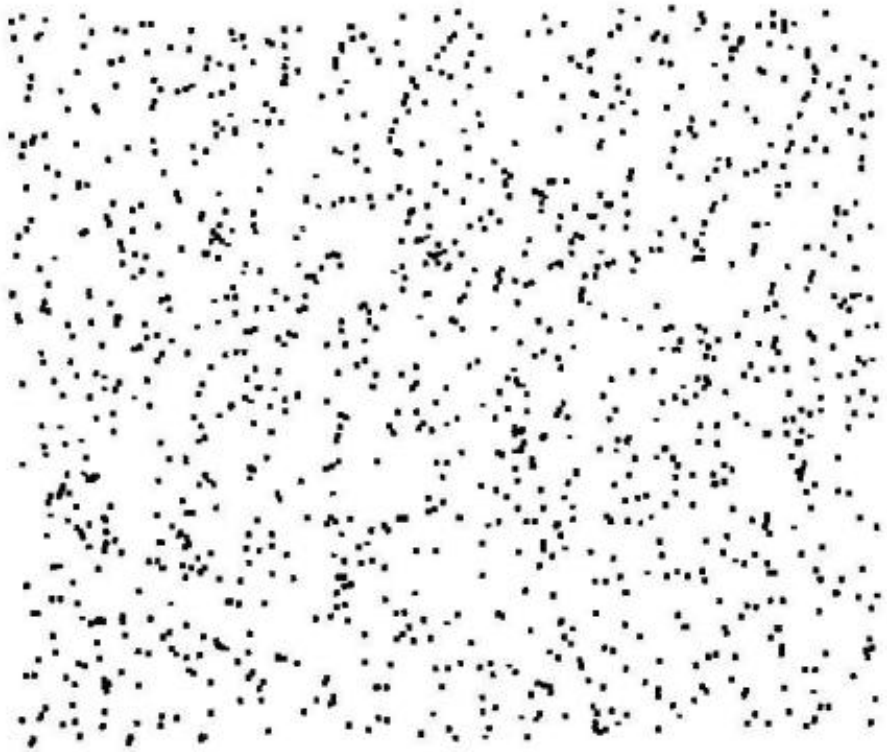
est complètement prévisible, bien que la proportion soit parfaitement respectée.

Ce qui est plus diffcile à appréhender est l'indépendance. Par exemple, dans 50% des cas, la touche appuyée doit être la même que la précédente....
C'est ce que le programme exploite pour prédire notre comportement dans plus de 50% des cas.

Points au hasard dans un rectangle

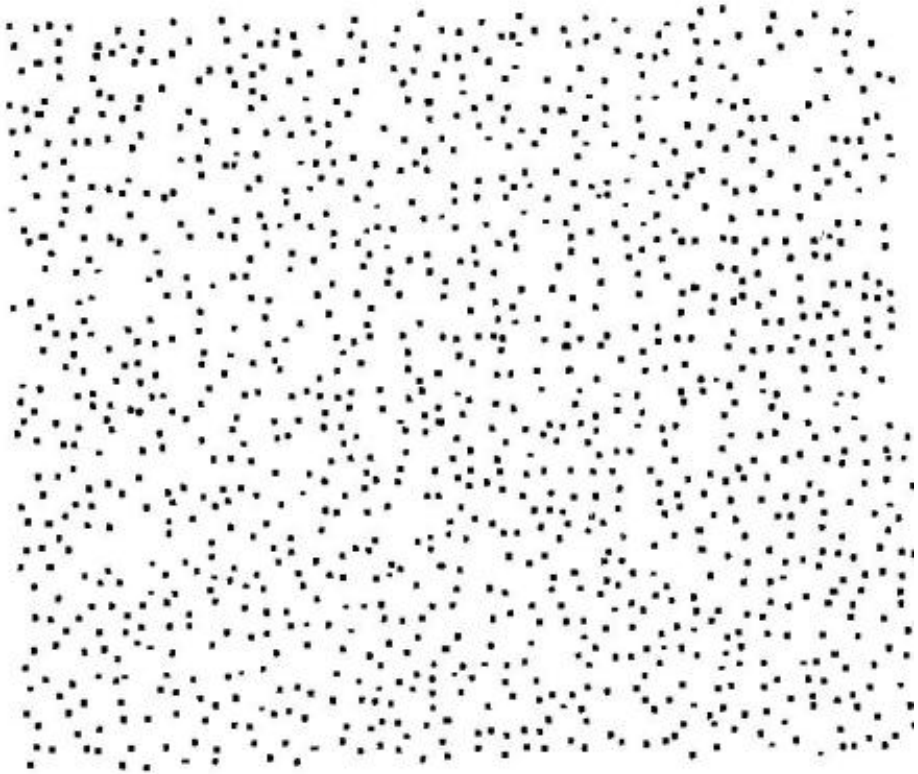
Points au hasard dans un rectangle

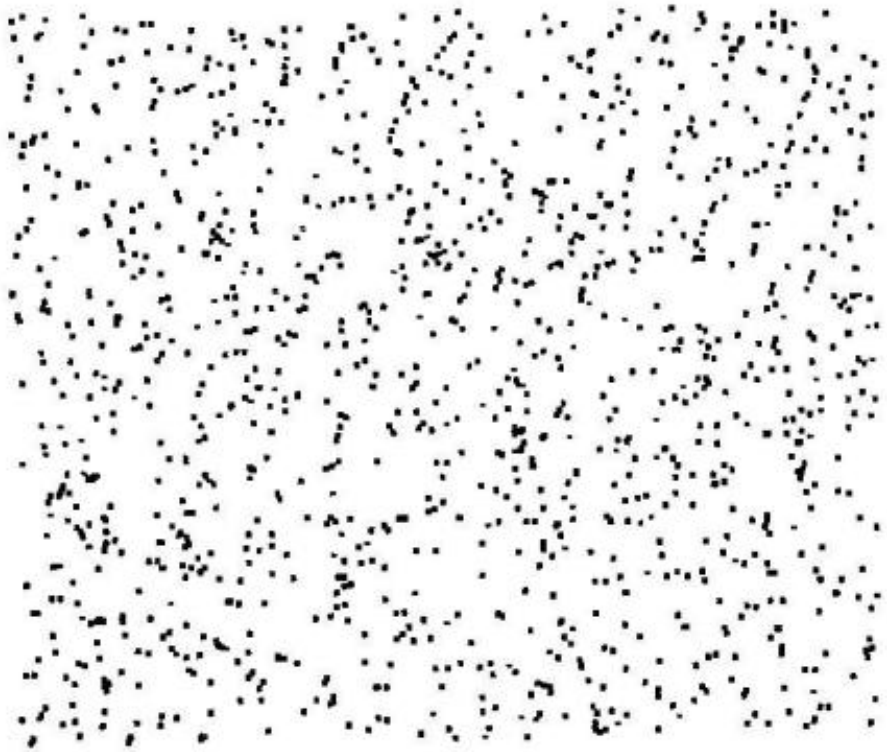




Voici des points au hasard dans un rectangle. Dans quelle image est-ce que les points ont été choisis aléatoirement, indépendamment des précédents ?

Points au hasard dans un rectangle

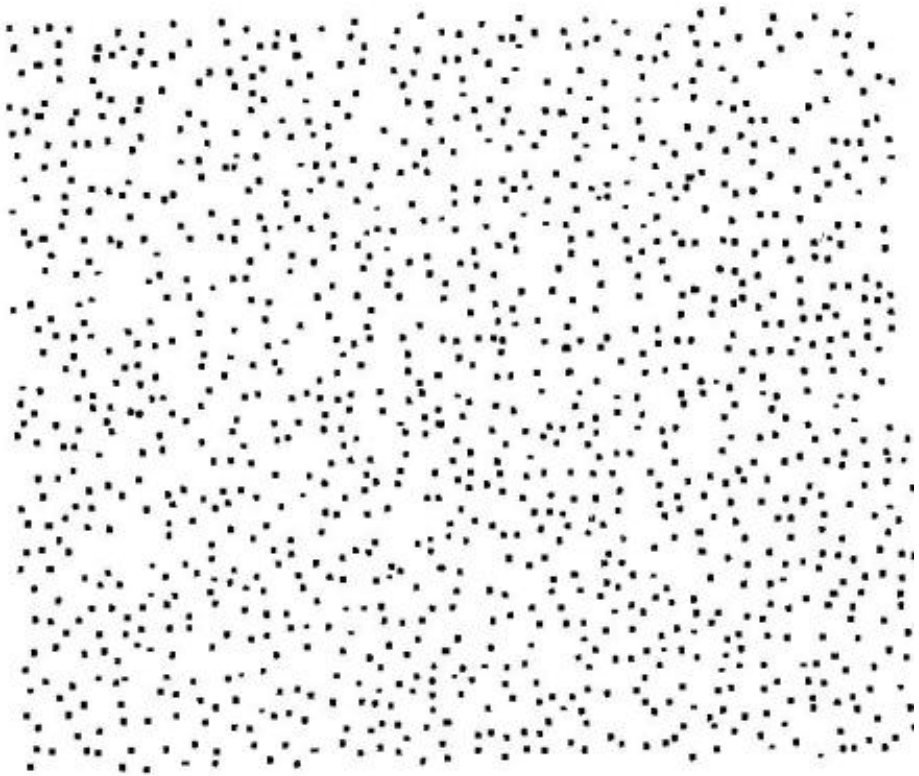


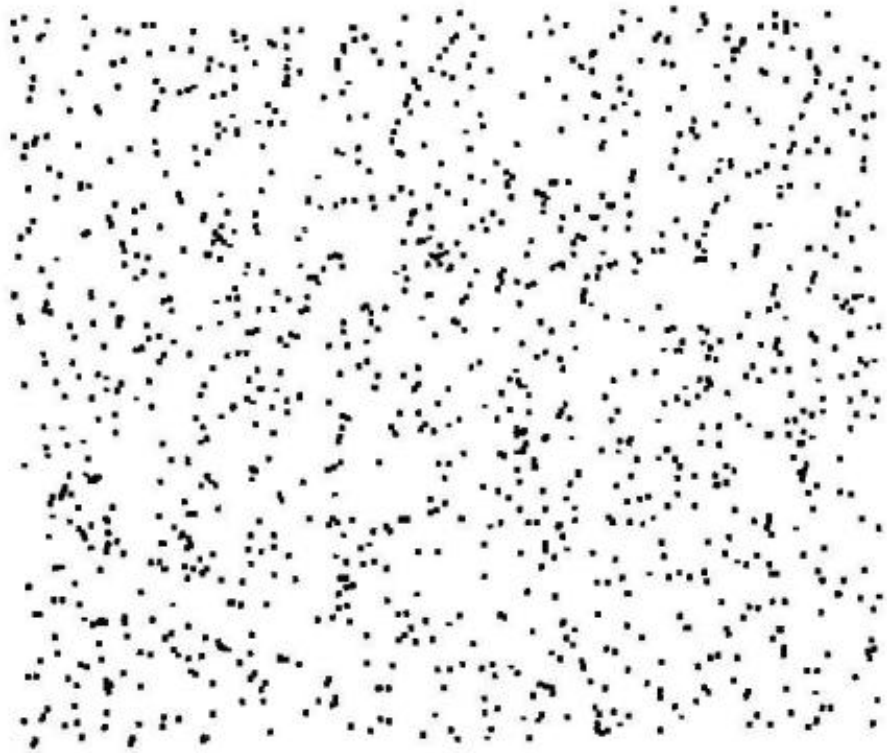


Voici des points au hasard dans un rectangle. Dans quelle image est-ce que les points ont été choisis aléatoirement, indépendamment des précédents ?

Réponse : l'image de droite !

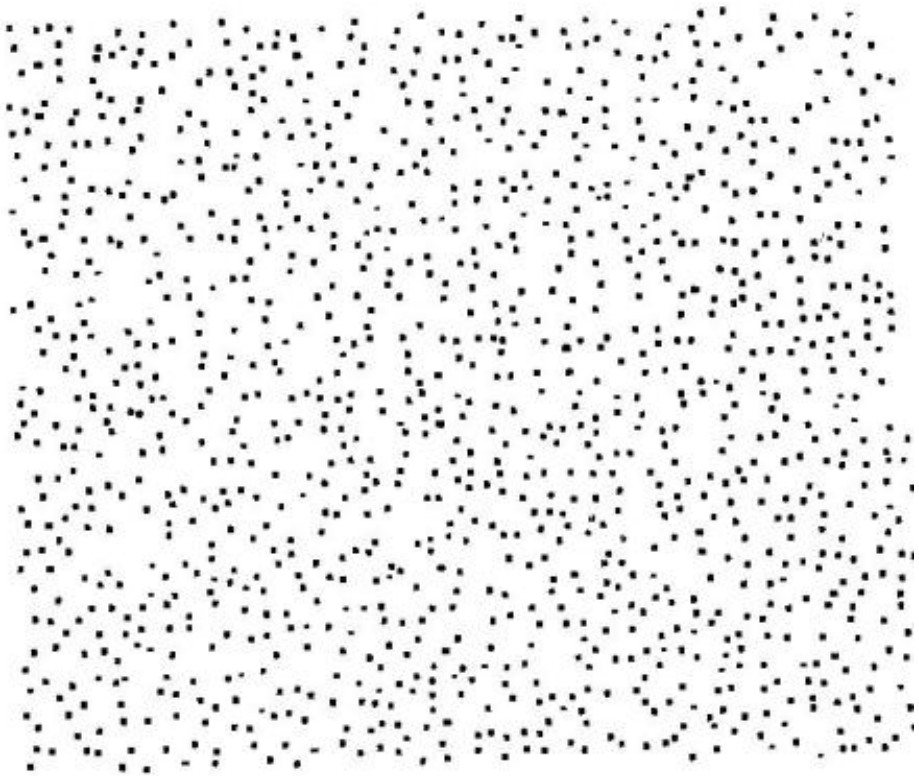
Points au hasard dans un rectangle

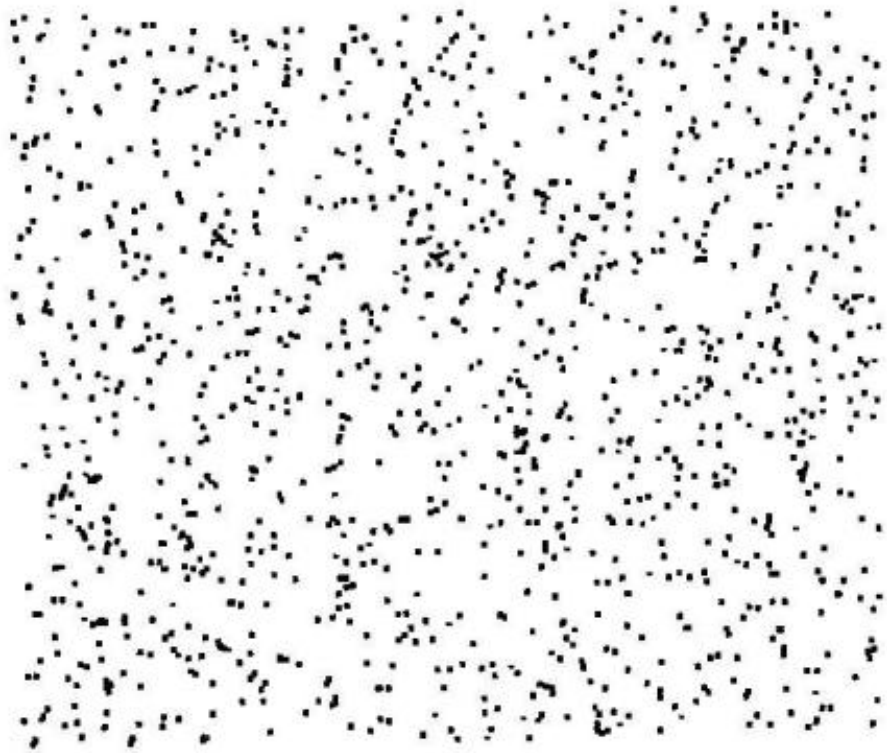




C'est similaire au paradoxe des anniversaires. Dans un groupe de 30 personnes, il est probable que deux personnes aient leur anniversaire le même jour.

Points au hasard dans un rectangle





C'est similaire au paradoxe des anniversaires. Dans un groupe de 30 personnes, il est probable que deux personnes aient leur anniversaire le même jour. Néanmoins, il est improbable qu'une personne donnée partage son anniversaire !

Processus physiques de génération de hasard

Processus physiques de génération de hasard

Quand on lance une pièce de monnaie, ou un dé, on observe un résultat imprévisible. C'est donc du hasard !

Processus physiques de génération de hasard

Quand on lance une pièce de monnaie, ou un dé, on observe un résultat imprévisible. C'est donc du hasard !
En fait, c'est plus **chaotique** que **aléatoire**. Le résultat dépend des conditions initiales de manière très sensible.

Processus physiques de génération de hasard

Quand on lance une pièce de monnaie, ou un dé, on observe un résultat imprévisible. C'est donc du hasard !
En fait, c'est plus **chaotique** que **aléatoire**. Le résultat dépend des conditions initiales de manière très sensible.

Comment faut-il tirer à pile ou face ?

1. en faisant tourner la pièce, comme une toupie ?
2. en la lançant et en la rattrapant dans sa main ?

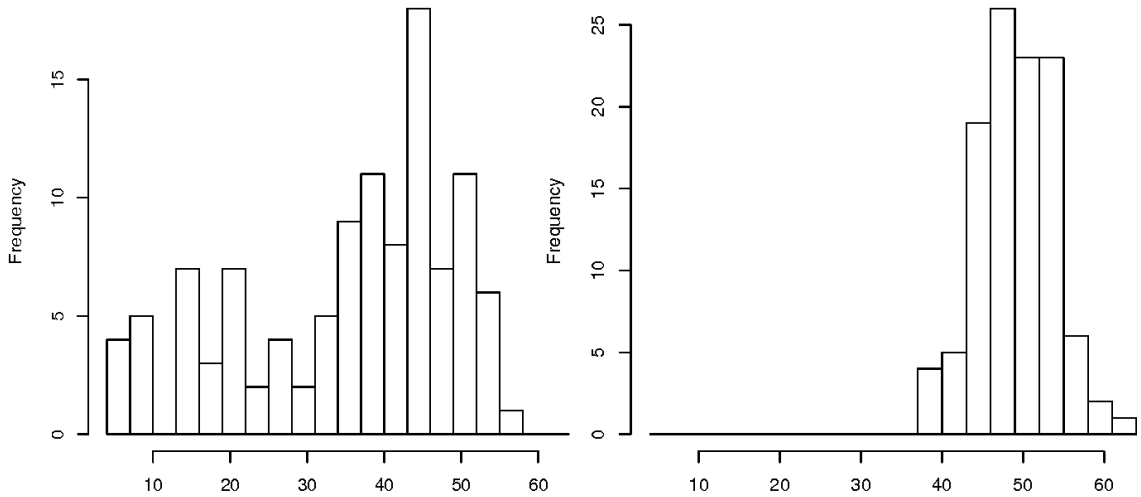
Processus physiques de génération de hasard

Quand on lance une pièce de monnaie, ou un dé, on observe un résultat imprévisible. C'est donc du hasard !
En fait, c'est plus **chaotique** que **aléatoire**. Le résultat dépend des conditions initiales de manière très sensible.

Comment faut-il tirer à pile ou face ?

1. en faisant tourner la pièce, comme une toupie ?
2. en la lançant et en la rattrapant dans sa main ?

Réponse expérimentale : des classes d'écoliers américains ont tiré 100 fois à pile ou face selon les deux méthodes. Résultats :



La science du lancer de pièce de monnaie

Très important, à retenir

NE JAMAIS FAIRE TOURNER UNE PIECE COMME UNE TOUPIE

La science du lancer de pièce de monnaie

Très important, à retenir

NE JAMAIS FAIRE TOURNER UNE PIECE COMME UNE TOUPIE

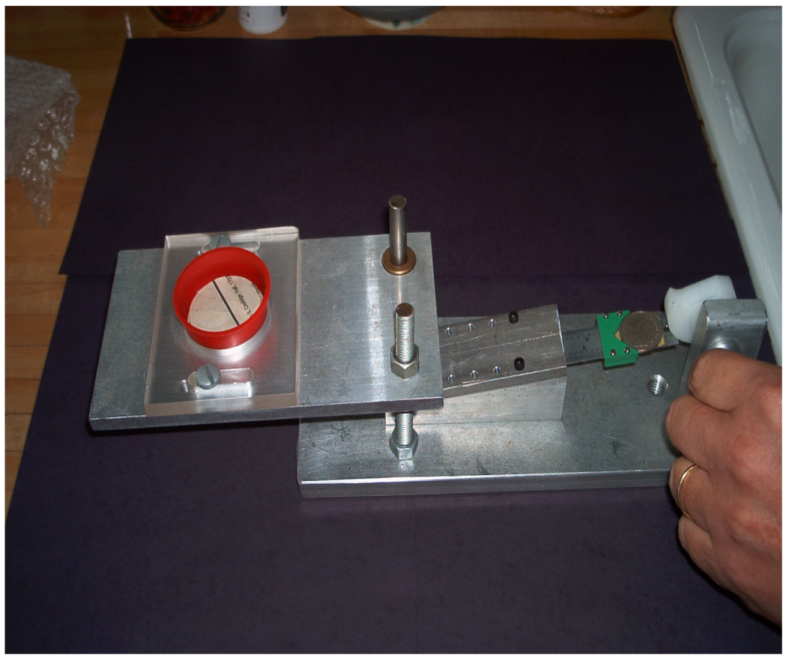
Persi Diaconis (mathématicien et magicien !) et Joe Keller ont étudié en détail le phénomène du lancer de pièce.

La science du lancer de pièce de monnaie

Très important, à retenir

NE JAMAIS FAIRE TOURNER UNE PIECE COMME UNE TOUPIE

Persi Diaconis (mathématicien et magicien !) et Joe Keller ont étudié en détail le phénomène du lancer de pièce.

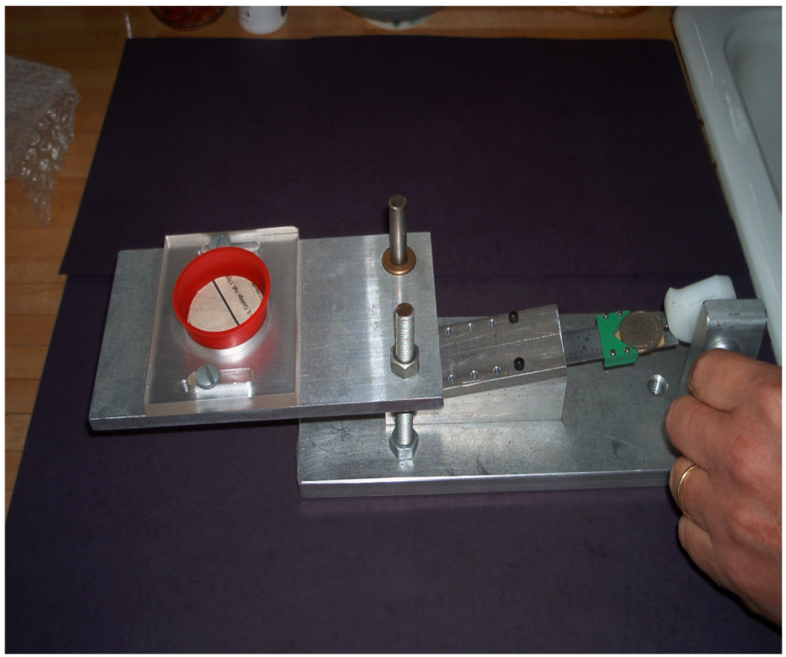


La science du lancer de pièce de monnaie

Très important, à retenir

NE JAMAIS FAIRE TOURNER UNE PIECE COMME UNE TOUPIE

Persi Diaconis (mathématicien et magicien !) et Joe Keller ont étudié en détail le phénomène du lancer de pièce.



Détermination expérimentale et théorique du résultat d'un lancer en fonction de la vitesse et de la vitesse angulaire initiale. En pratique, une pièce lancée par un humain retombe au moins 51% du temps sur la face qui regardait vers le haut...

Devinette : débiaiser les pièces

Deux amis veulent tirer à pile ou face de manière impartiale, mais n'ont qu'une pièce dont ils ne savent pas si elle est biaisée ou non ?

Comment faire ?

Générateurs pseudo-aléatoires

Tous les langages informatiques ont une fonction `rand` ou `random` qui génère des nombres « au hasard ».

Générateurs pseudo-aléatoires

Tous les langages informatiques ont une fonction `rand` ou `random` qui génère des nombres « au hasard ».

En théorie, ces nombres sont prévisibles, un peu comme les décimales de π. A partir d'une donnée initiale, on produit efficacement des suites de nombres qui ont tout l'air d'être aléatoires.

Générateurs pseudo-aléatoires

Tous les langages informatiques ont une fonction `rand` ou `random` qui génère des nombres « au hasard ».

En théorie, ces nombres sont prévisibles, un peu comme les décimales de π. A partir d'une donnée initiale, on produit efficacement des suites de nombres qui ont tout l'air d'être aléatoires.

Pour être certifié, un générateur de nombres pseudo-aléatoires doit vérifier toute une série de tests statistiques extrêment sophistiqués pour détecter même de très faibles corrélations entres les valeurs produites.

Générateurs pseudo-aléatoires

Tous les langages informatiques ont une fonction `rand` ou `random` qui génère des nombres « au hasard ».

En théorie, ces nombres sont prévisibles, un peu comme les décimales de π. A partir d'une donnée initiale, on produit efficacement des suites de nombres qui ont tout l'air d'être aléatoires.

Pour être certifié, un générateur de nombres pseudo-aléatoires doit vérifier toute une série de tests statistiques extrêment sophistiqués pour détecter même de très faibles corrélations entres les valeurs produites.

Néanmoins,

- Les décimales de π passent ces tests ..
- Si on connaît la donnée initiale, on peut tout prédire !

Générateurs pseudo-aléatoires

Tous les langages informatiques ont une fonction `rand` ou `random` qui génère des nombres « au hasard ».

En théorie, ces nombres sont prévisibles, un peu comme les décimales de π. A partir d'une donnée initiale, on produit efficacement des suites de nombres qui ont tout l'air d'être aléatoires.

Pour être certifié, un générateur de nombres pseudo-aléatoires doit vérifier toute une série de tests statistiques extrêment sophistiqués pour détecter même de très faibles corrélations entres les valeurs produites.

Néanmoins,

- Les décimales de π passent ces tests ..
- Si on connaît la donnée initiale, on peut tout prédire !

Or il est fondamental, par exemple en cryptographie, de disposer de nombres imprévisbles...

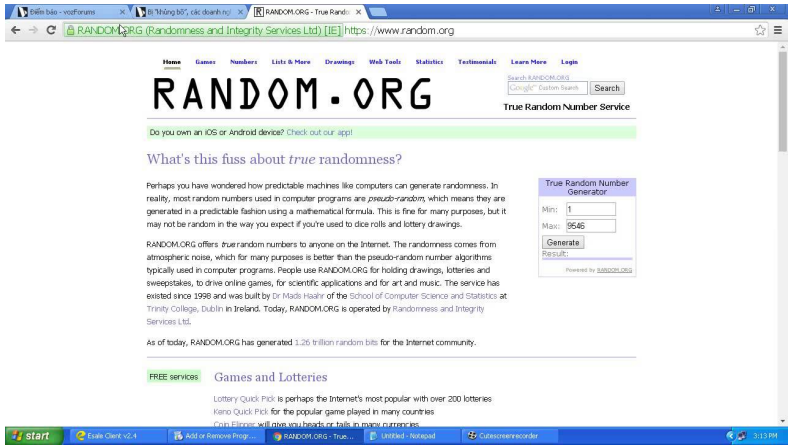
Le vrai hasard

Pour certaines applications sensibles, c'est un problème... on préfère alors un générateur aléatoire matériel (hardware) qui utilise des données initiales telles que la température du processeur...

Le vrai hasard

Pour certaines applications sensibles, c'est un problème... on préfère alors un générateur aléatoire matériel (hardware) qui utilise des données initiales telles que la température du processeur...

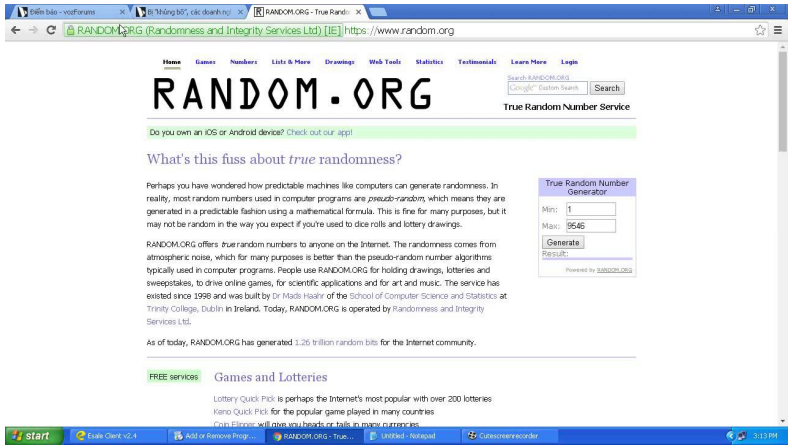
Vous pouvez trouver du vrai hasard sur `www.random.org`



Le vrai hasard

Pour certaines applications sensibles, c'est un problème... on préfère alors un générateur aléatoire matériel (hardware) qui utilise des données initiales telles que la température du processeur...

Vous pouvez trouver du vrai hasard sur `www.random.org`



Encore plus fort : à l'aide de la mécanique quantique, on peut générer du hasard dont on peut certifier que personne au monde n'est capable de le prédire

Les théorèmes du hasard

Deux types de théorèmes en maths

Il y a deux types de théorèmes en maths

1. Les théorèmes qui sont « évidemment » vrais, mais parfois difficiles à démontrer.
2. Les théorèmes « miraculeux », joyaux insoupçonnés.

Deux types de théorèmes en maths

Il y a deux types de théorèmes en maths

1. Les théorèmes qui sont « évidemment » vrais, mais parfois difficiles à démontrer.
2. Les théorèmes « miraculeux », joyaux insoupçonnés.

Exemple de théorème évidemment vrai :

Théorème (Théorème de Jordan)

Une courbe qui se referme sur elle-même sans jamais se croiser délimite un intérieur et un extérieur.

La plupart des mathématiciens connaissent le résultat mais ne sauraient pas le démontrer !

Deux types de théorèmes en maths

Il y a deux types de théorèmes en maths

1. Les théorèmes qui sont « évidemment » vrais, mais parfois difficiles à démontrer.
2. Les théorèmes « miraculeux », joyaux insoupçonnés.

Exemple de théorème évidemment vrai :

Théorème (Théorème de Jordan)

Une courbe qui se referme sur elle-même sans jamais se croiser délimite un intérieur et un extérieur.

La plupart des mathématiciens connaissent le résultat mais ne sauraient pas le démontrer !

Exemple de miracle : des formules telles que

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Un théorème évident : la loi des grands nombres

Théorème (Loi des grands nombres)

Si on répète suffisamment de fois une expérience aléatoire et qu'on fait la moyenne des résultats obtenus, on obtient un nombre qui est très proche de la vraie moyenne.

Personne n'est surpris par ce théorème.

Un théorème miraculeux : le théorème central limite

Lançons un grand nombre de fois (N fois) une pièce de monnaie, et comptons $+1$ pour chaque pile obtenu, -1 pour chaque face obtenu. On obtient un nombre Z, qui est compris entre $-N$ et $+N$.

Un théorème miraculeux : le théorème central limite

Lançons un grand nombre de fois (N fois) une pièce de monnaie, et comptons $+1$ pour chaque pile obtenu, -1 pour chaque face obtenu. On obtient un nombre Z, qui est compris entre $-N$ et $+N$.

Le nombre obtenu est beaucoup plus petit que N, en fait il est de l'ordre de $\sqrt{N}$ ($\sigma = \sqrt{N}$ est appelé l'écart-type), soit deux fois moins de chiffres !

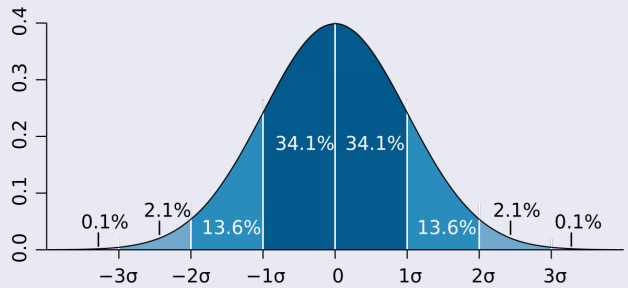
Un théorème miraculeux : le théorème central limite

Lançons un grand nombre de fois (N fois) une pièce de monnaie, et comptons $+1$ pour chaque pile obtenu, -1 pour chaque face obtenu. On obtient un nombre Z, qui est compris entre $-N$ et $+N$.

Le nombre obtenu est beaucoup plus petit que N, en fait il est de l'ordre de $\sqrt{N}$ ($\sigma = \sqrt{N}$ est appelé l'écart-type), soit deux fois moins de chiffres !

Théorème (Théorème central limite)

Lorsque N est grand, le nombre $Z/\sqrt{N}$ est distribué selon une loi gaussienne (courbe en cloche).



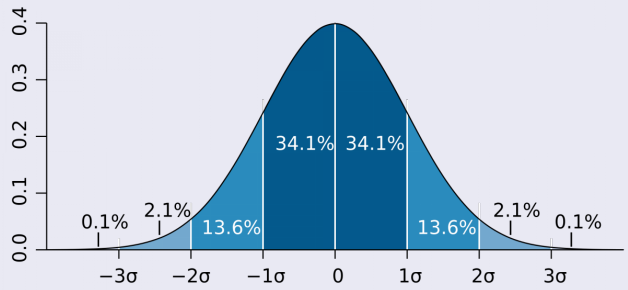
Un théorème miraculeux : le théorème central limite

Lançons un grand nombre de fois (N fois) une pièce de monnaie, et comptons $+1$ pour chaque pile obtenu, -1 pour chaque face obtenu. On obtient un nombre Z, qui est compris entre $-N$ et $+N$.

Le nombre obtenu est beaucoup plus petit que N, en fait il est de l'ordre de $\sqrt{N}$ ($\sigma = \sqrt{N}$ est appelé l'écart-type), soit deux fois moins de chiffres !

Théorème (Théorème central limite)

Lorsque N est grand, le nombre $Z/\sqrt{N}$ est distribué selon une loi gaussienne (courbe en cloche).



C'est surprenant, d'autant plus que la loi gaussienne est universelle : elle apparaît aussi pour la somme de dés, ou même la somme de n'importe quoi d'aléatoire !

Le hasard au service du mathématicien

La méthode probabiliste

Quand les choix sont trop compliqués, choisissez au hasard. Vous éviterez ainsi de faire de graves erreurs en voulant trop bien faire.

Cette méthode marche bien quand il y a de nombreuses petites sources d'erreurs à éviter.

Nous pouvons dompter le hasard.

Théorie de Ramsey

Les théorèmes du type Ramsey sont des résultats du type suivant

Théorème

Dans un groupe de 3 personnes, au moins 2 sont du même sexe.

Théorie de Ramsey

Les théorèmes du type Ramsey sont des résultats du type suivant

Théorème

Dans un groupe de 3 personnes, au moins 2 sont du même ~~sexe~~ genre.

Théorie de Ramsey

Les théorèmes du type Ramsey sont des résultats du type suivant

Théorème

Dans un groupe de ? personnes, au moins 2 sont du même ~~sexe~~ genre.

Théorie de Ramsey

Les théorèmes du type Ramsey sont des résultats du type suivant

Théorème

Dans un groupe de 3 personnes, au moins 2 sont du même sexe.

Un autre théorème de Ramsey

Voici un exemple un peu plus sophistiqué. Considérons un groupe de personnes où 2 d'entre elles sont soit amies ou bien inconnues.

Un autre théorème de Ramsey

Voici un exemple un peu plus sophistiqué. Considérons un groupe de personnes où 2 d'entre elles sont soit amies ou bien inconnues.

Théorème

Dans tout groupe de 6 personnes, on peut trouver 3 personnes qui sont toutes amies entre elles, ou bien 3 personnes qui sont toutes inconnues entre elles.

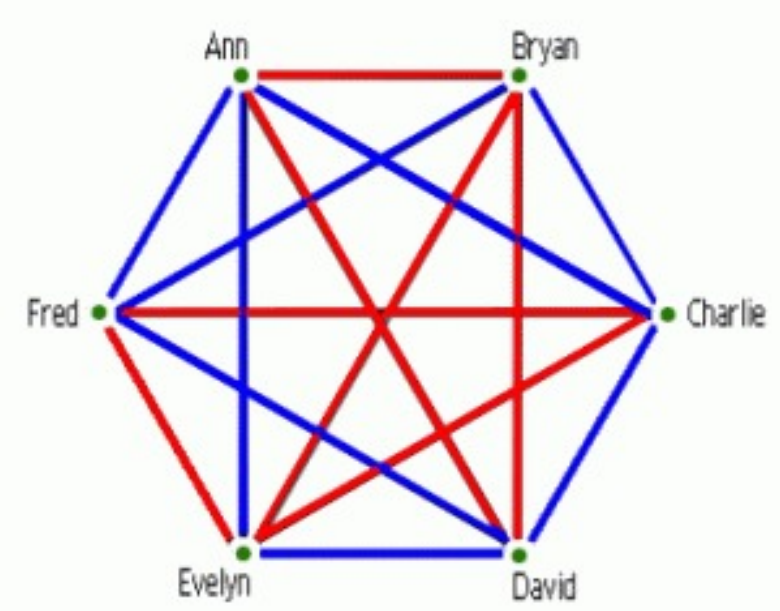
Ces théorèmes montrent que le chaos total est impossible : n'importe quel gros ensemble contient des petits sous-ensembles structurés.

Théorie de Ramsey, II

Théorème

Dans tout groupe de 6 personnes, on peut trouver 3 personnes qui sont toutes amies entre elles, ou bien 3 personnes qui sont toutes inconnues entre elles.

Identifions chaque personne à un point du plan. Relions deux personnes amies par un trait bleu et deux personnes inconnues par un trait rouge.



Il faut montrer qu'il y a toujours un triangle rouge ou un triangle bleu !

Théorie de Ramsey, III

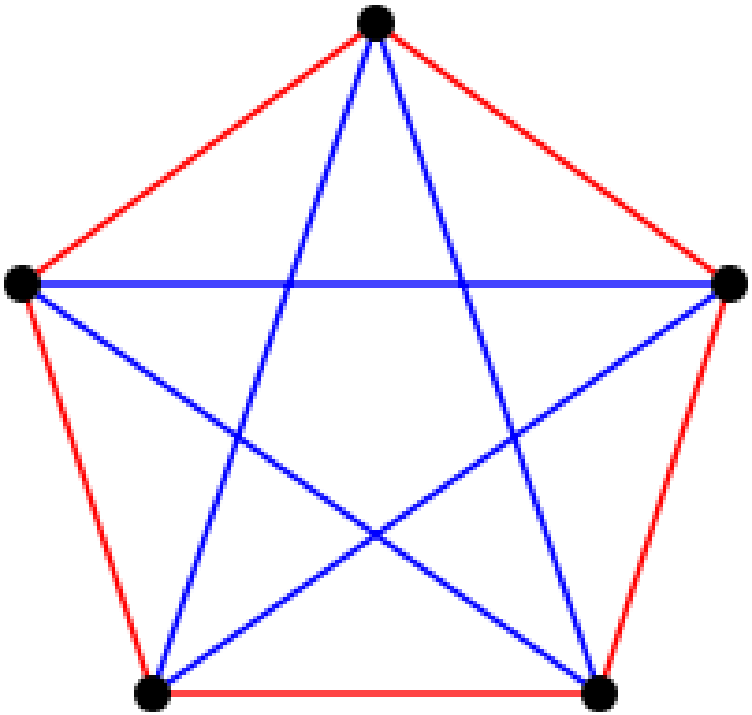
Théorème

Dans tout groupe de 6 personnes, on peut trouver 3 personnes qui sont toutes amies entre elles, ou bien 3 personnes qui sont toutes inconnues entre elles.
Ce n'est pas vrai avec 5 personnes !

Théorie de Ramsey, III

Théorème

Dans tout groupe de 6 personnes, on peut trouver 3 personnes qui sont toutes amies entre elles, ou bien 3 personnes qui sont toutes inconnues entre elles.
Ce n'est pas vrai avec 5 personnes !

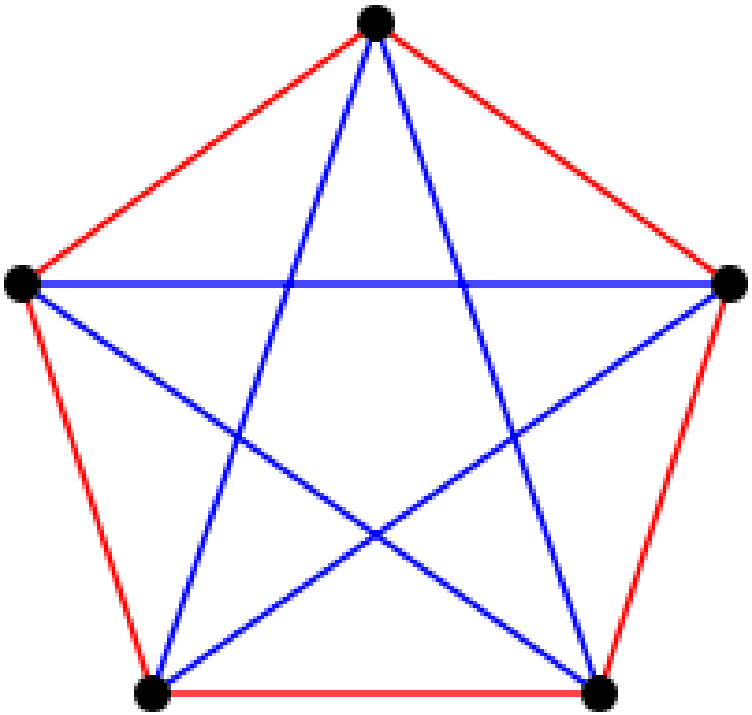


On dit que $R(3) = 6$.

Théorie de Ramsey, III

Théorème

Dans tout groupe de 6 personnes, on peut trouver 3 personnes qui sont toutes amies entre elles, ou bien 3 personnes qui sont toutes inconnues entre elles.
Ce n'est pas vrai avec 5 personnes !



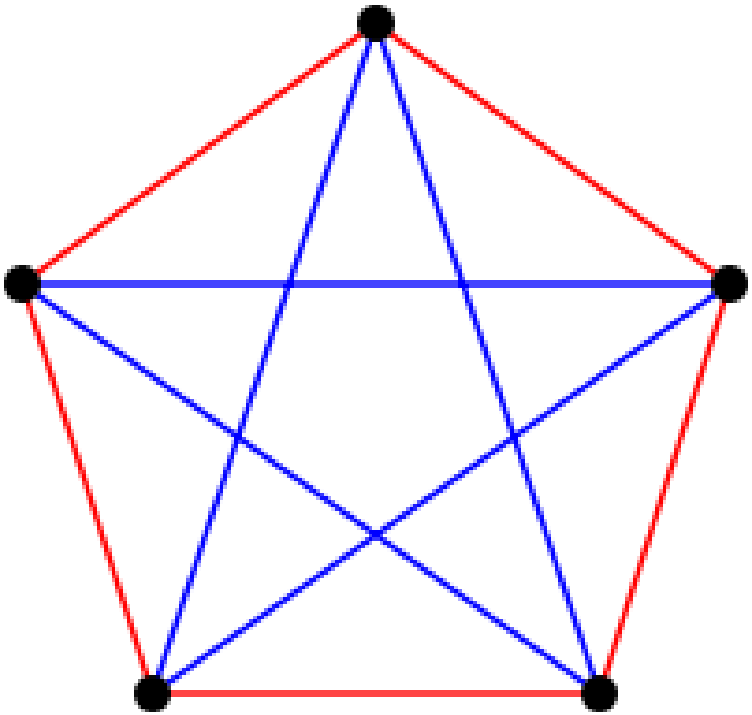
On dit que $R(3) = 6$.

On sait aussi que $R(4) = 18$.

Théorie de Ramsey, III

Théorème

Dans tout groupe de 6 personnes, on peut trouver 3 personnes qui sont toutes amies entre elles, ou bien 3 personnes qui sont toutes inconnues entre elles.
Ce n'est pas vrai avec 5 personnes !



On dit que $R(3) = 6$.

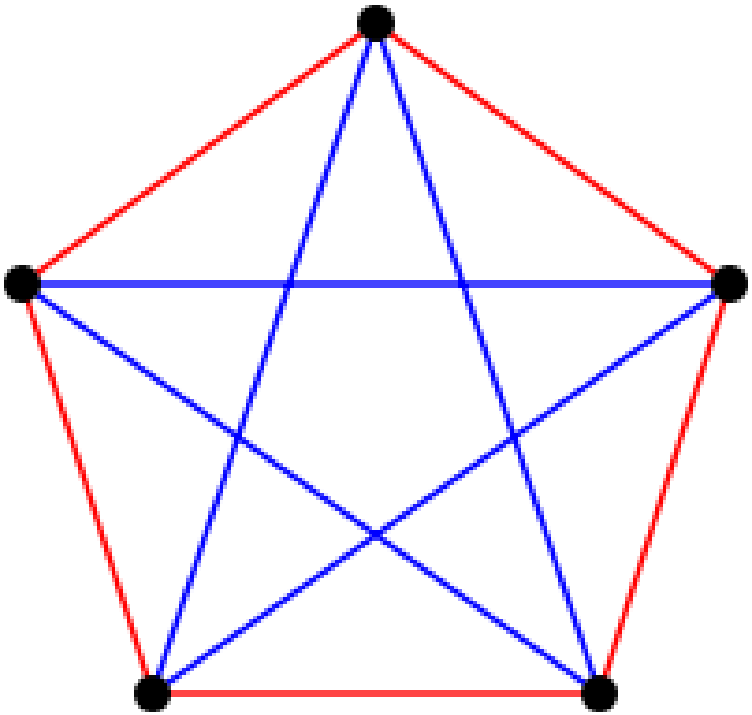
On sait aussi que $R(4) = 18$.

On ne connaît pas la valeur de $R(5)$. C'est entre 43 et 48.

Théorie de Ramsey, III

Théorème

Dans tout groupe de 6 personnes, on peut trouver 3 personnes qui sont toutes amies entre elles, ou bien 3 personnes qui sont toutes inconnues entre elles.
Ce n'est pas vrai avec 5 personnes !



On dit que $R(3) = 6$.

On sait aussi que $R(4) = 18$.

On ne connaît pas la valeur de $R(5)$. C'est entre 43 et 48.

On ne connaîtra vraisemblablement jamais la valeur de $R(6)$....

Théorie de Ramsey, IV

Le nombre $R(n)$ est tellement grand que l'on ne sait pas déterminer sa valeur exacte.

Théorie de Ramsey, IV

Le nombre $R(n)$ est tellement grand que l'on ne sait pas déterminer sa valeur exacte.
Soyons plus modeste : combien de chiffres a le nombre $R(n)$?
Le nombres de chiffres de $R(n)$ est le logarithme en base 10, $\log_{10} R(n)$.

Théorie de Ramsey, IV

Le nombre $R(n)$ est tellement grand que l'on ne sait pas déterminer sa valeur exacte.
Soyons plus modeste : combien de chiffres a le nombre $R(n)$?
Le nombres de chiffres de $R(n)$ est le logarithme en base 10, $\log_{10} R(n)$.

Théorème

Le nombre $R(n)$ a au plus $4n$ chiffres (en base 2).

Il suffit de reprendre les idées de la preuve que $R(3) \leqslant 6$ que nous avons vue tout à l'heure.

Théorie de Ramsey, IV

Le nombre $R(n)$ est tellement grand que l'on ne sait pas déterminer sa valeur exacte.
Soyons plus modeste : combien de chiffres a le nombre $R(n)$?
Le nombres de chiffres de $R(n)$ est le logarithme en base 10, $\log_{10} R(n)$.

Théorème

Le nombre $R(n)$ a au plus $4n$ chiffres (en base 2).

Il suffit de reprendre les idées de la preuve que $R(3) \leqslant 6$ que nous avons vue tout à l'heure.

Théorème

Le nombre $R(n)$ a au moins $n/2$ chiffres (en base 2).

Théorie de Ramsey, IV

Le nombre $R(n)$ est tellement grand que l'on ne sait pas déterminer sa valeur exacte.
Soyons plus modeste : combien de chiffres a le nombre $R(n)$?
Le nombres de chiffres de $R(n)$ est le logarithme en base 10, $\log_{10} R(n)$.

Théorème

Le nombre $R(n)$ a au plus $4n$ chiffres (en base 2).

Il suffit de reprendre les idées de la preuve que $R(3) \leqslant 6$ que nous avons vue tout à l'heure.

Théorème

Le nombre $R(n)$ a au moins $n/2$ chiffres (en base 2).

Là, il faut donner un exemple ! Pour montrer que $R(100)$ a au moins 50 chiffres, il faut relier $2^{50} - 1 = 1125899906842623$ points par des traits rouges et bleus sans que 100 de ces points soient tous reliés par la même couleur.

Théorie de Ramsey, V

Personne ne sait faire ça, c'est trop compliqué. L'idée géniale est de choisir si chaque trait va être bleu ou rouge en fonction du lancer d'une pièce de monnaie.

Théorie de Ramsey, V

Personne ne sait faire ça, c'est trop compliqué. L'idée géniale est de choisir si chaque trait va être bleu ou rouge en fonction du lancer d'une pièce de monnaie.
On relie $N = 2^n - 1$ points par des couleurs au hasard. Quelle est la probabilité qu'il existe un sous-ensemble de n points tous reliés par des traits la même couleur ?

Théorie de Ramsey, V

Personne ne sait faire ça, c'est trop compliqué. L'idée géniale est de choisir si chaque trait va être bleu ou rouge en fonction du lancer d'une pièce de monnaie.
On relie $N = 2^n - 1$ points par des couleurs au hasard. Quelle est la probabilité qu'il existe un sous-ensemble de n points tous reliés par des traits la même couleur ?
Il y a $\binom{N}{n}$ sous-ensembles de n points, et chaque sous-ensemble de n points a probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}-1}$ d'être reliés par des traits de la même couleur. On vérifie que

$$\underbrace{\binom{N}{n}}_{\text{un nombre très grand}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}-1}}_{\text{un nombre très petit}} < 1,$$

Théorie de Ramsey, V

Personne ne sait faire ça, c'est trop compliqué. L'idée géniale est de choisir si chaque trait va être bleu ou rouge en fonction du lancer d'une pièce de monnaie.
On relie $N = 2^n - 1$ points par des couleurs au hasard. Quelle est la probabilité qu'il existe un sous-ensemble de n points tous reliés par des traits la même couleur ?
Il y a $\binom{N}{n}$ sous-ensembles de n points, et chaque sous-ensemble de n points a probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}-1}$ d'être reliés par des traits de la même couleur. On vérifie que

$$\underbrace{\binom{N}{n}}_{\text{un nombre très grand}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}-1}}_{\text{un nombre très petit}} < 1,$$

donc il existe bien un coloriage comme on en voulait. Fin de la preuve !

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

On dit qu'un nombre x est **normal** si

- tous les chiffres entre 0 et 9 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/10$ à la limite,

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

On dit qu'un nombre x est **normal** si

- tous les chiffres entre 0 et 9 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/10$ à la limite,
- toutes les « mots » à 2 chiffres entre 00 et 99 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/100$ à la limite,

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

On dit qu'un nombre x est **normal** si

- tous les chiffres entre 0 et 9 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/10$ à la limite,
- toutes les « mots » à 2 chiffres entre 00 et 99 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/100$ à la limite,
- toutes les « mots » à 3 chiffres entre 000 et 999 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/1000$ à la limite.,

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

On dit qu'un nombre x est **normal** si

- tous les chiffres entre 0 et 9 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/10$ à la limite,
- toutes les « mots » à 2 chiffres entre 00 et 99 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/100$ à la limite,
- toutes les « mots » à 3 chiffres entre 000 et 999 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/1000$ à la limite.,
- et caetera...

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

On dit qu'un nombre x est **normal** en base 10 si

- tous les chiffres entre 0 et 9 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/10$ à la limite,
- toutes les « mots » à 2 chiffres entre 00 et 99 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/100$ à la limite,
- toutes les « mots » à 3 chiffres entre 000 et 999 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/1000$ à la limite.,
- et caetera...

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

On dit qu'un nombre x est **normal** si

- tous les chiffres entre 0 et 9 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/10$ à la limite,
- toutes les « mots » à 2 chiffres entre 00 et 99 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/100$ à la limite,
- toutes les « mots » à 3 chiffres entre 000 et 999 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/1000$ à la limite.,
- et caetera...

Théorème

Il existe des nombres qui sont normaux en base 10.
Mieux : il existe des nombres qui sont normaux en toute base !

Nombres normaux

Soit x un nombre réel. Par exemple, $x = 2,168157315463876716871....$

On dit qu'un nombre x est **normal** si

- tous les chiffres entre 0 et 9 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/10$ à la limite,
- toutes les « mots » à 2 chiffres entre 00 et 99 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/100$ à la limite,
- toutes les « mots » à 3 chiffres entre 000 et 999 apparaissent dans x, chacun avec proportion $1/1000$ à la limite.,
- et caetera...

Théorème

Il existe des nombres qui sont normaux en base 10.
Mieux : il existe des nombres qui sont normaux en toute base !

Il suffit de les choisir au hasard, c'est la loi des grands nombres !

Conclusion

Le hasard est aussi un outil qui sert à montrer l'existence d'objets mathématiques qui sont trop compliqués pour être décrits explicitement.

Conclusion

Le hasard est aussi un outil qui sert à montrer l'existence d'objets mathématiques qui sont trop compliqués pour être décrits explicitement.

Beaucoup de découvertes sont faites « par hasard ». La méthode probabiliste pousse ce principe à son paroxysme ; le hasard est instrumentalisé pour chercher à notre place.

Conclusion

Le hasard est aussi un outil qui sert à montrer l'existence d'objets mathématiques qui sont trop compliqués pour être décrits explicitement.

Beaucoup de découvertes sont faites « par hasard ». La méthode probabiliste pousse ce principe à son paroxysme ; le hasard est instrumentalisé pour chercher à notre place.

Le même principe se retrouve en informatique : pour certains problèmes, on pense (mais on ne sait pas le prouver) que les algorithmes les plus puissants **doivent** utiliser le hasard. Le hasard est un ressource au service des ordinateurs.

Conclusion

Le hasard est aussi un outil qui sert à montrer l'existence d'objets mathématiques qui sont trop compliqués pour être décrits explicitement.

Beaucoup de découvertes sont faites « par hasard ». La méthode probabiliste pousse ce principe à son paroxysme ; le hasard est instrumentalisé pour chercher à notre place.

Le même principe se retrouve en informatique : pour certains problèmes, on pense (mais on ne sait pas le prouver) que les algorithmes les plus puissants **doivent** utiliser le hasard. Le hasard est un ressource au service des ordinateurs.

Merci de votre attention !