

12 16 septembre

①

ANALYSE 1 POUR INFORMATIENS ... ET INFORMATIENNES

Deux types d'enseignement apparaissent sur votre emploi du temps

- CM (cours magistral) le vendredi 8h → 11h15

Enseignant : M. AUBRY (BRACONNIER 227)

- TD (travaux dirigés) le lundi 14h → 17h15

7 groupes A B C D E F G début lundi prochain

Certains créneaux marqués CM sont utilisés différemment

- examens partiels
- séance de soutien (correction d'examens blancs)
- séance de tutorat (des élèves de L3/M1 vous aident)

Pour le planning détaillé, voir la page du cours

(lien envoyé par mail)

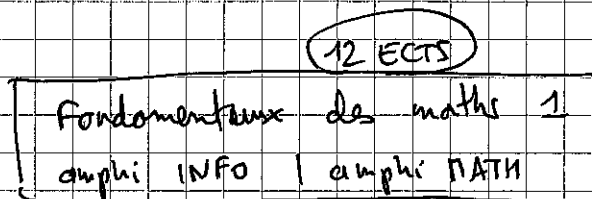
Evaluation

2 contrôles partiels	lundi	3 octobre	CP1
	lundi	21 novembre	CP2
2 QCM	vendredi	28 octobre	QCM1
	vendredi	9 décembre	QCM2
1 examen final	janvier		CT

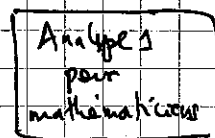
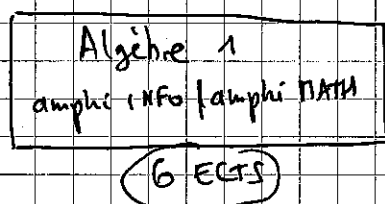
$$\text{note} = 0,4 \times \text{CT} + \cancel{0,2} \times \max(\text{CP1}, \text{CT}) + 0,2 \times \max(\text{CP2}, \text{CT}) \\ + 0,1 \times \max(\text{QCM1}, \text{CT}) + 0,1 \times \max(\text{QCM2}, \text{CT})$$

la maquette de la licence a changé depuis l'an dernier

2021-2022



2022-2023



(surtout utile pour regarder les sujets d'annales).

Après chaque cours → notes scanées en ligne

→ cours que VOUS pouvez éditer en LATEX !

Programme : les maths du lycée en plus solide
+ quelques nouveautés

On insiste sur la rigueur. Exemple : ne pas diviser par zéro

Exemple : Soit t un nombre réel. On a $t^2 \geq 0$ donc $t^2 + 1 \geq 1$
et $t^2 + 1 \neq 0$.

On peut donc écrire $\frac{1}{t^2 + 1}$

Si on écrit $\frac{1}{t^2 + 1}$ sans expliquer qu'on a le droit,
on est pénalisé.

1.1 les ensembles de nombres

• $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ les entiers naturels.

Une variante $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}$ privé de 0.

• $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ les entiers relatifs

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$ privé de 0.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

↑
symbole "inclus dans"

(on dit $A \subset B$ si tout élément de A est dans B)

$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ (l'élément -1 est dans $\mathbb{Z}$ et pas dans $\mathbb{N}$)

Un autre symbole similaire est le symbole $\in$ qui se lit "appartient à".

$n \in \mathbb{N}$

n appartient à $\mathbb{N}$

n est l'un des entiers naturels

Piège ne pas confondre les symboles $\subset$ et $\in$

On a

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$

$3 \in \mathbb{N}$

$3 \in \mathbb{Z}$

$-4 \in \mathbb{Z}$

$-4 \notin \mathbb{N}$

Mais on n'écrit pas

~~$5 \in \mathbb{N}$~~

SYNTAX ERROR
cét énoncé n'a pas de sens.

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels (= fractions)

$\mathbb{Q} = \left\{ \text{quotients de la forme } \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$

↑
on précise bien $b \in \mathbb{Z}^*$
et non $b \in \mathbb{Z}$ pour ne
pas diviser par 0.

Remarque : on pourrait aussi demander $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}^*$.

Difficulté : un même élément de $\mathbb{Q}$ peut être représenté par plusieurs fractions

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

On a, pour $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$ $a' \in \mathbb{Z}, b' \in \mathbb{Z}^*$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ si et seulement si } ab' = a'b$$

On écrit souvent « P si et seulement si Q »

ou en abrégé « P ssi Q ».

Cela veut dire : si P est vrai, alors Q est vrai

ET AUSSI

si Q est vrai, alors P est vrai



Ne pas confondre $\mathbb{Q}$ avec l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux de la forme $a \cdot 10^m$ avec $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

Exemple 46,253 est un nombre décimal

$$46,253 = 46253 \times 10^{-3} = \frac{46253}{1000}$$

Pour les mathématiciens, $\mathbb{Q}$ est plus important que $\mathbb{D}$

↑
fait jouer un rôle
privilégié au nombre 10

Un nombre décimal a une suite finie de chiffres après la virgule.

$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et l'inclusion est stricte (c'est-à-dire $\mathbb{D} \neq \mathbb{Q}$)

En effet, il existe des rationnels non décimaux, comme

$$\frac{1}{3} = 0,33333 \dots$$

Suite infinie de 3

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, de la forme suivante

-75,23675...

↑ ↑ ↑ ↑

un signe + un nombre une virgule une suite finie ou infinie
ou - entier de chiffres après la virgule

(omis quand c'est +)

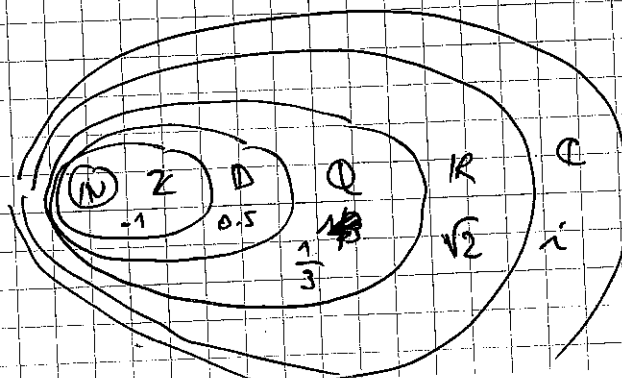
Attention : un même nombre réel peut avoir plusieurs écritures

$$0 = +0 = +0,000 = -0,00$$

$$1 = 0,9999 \dots$$

Suite infinie de 9

En dessins



1.2 Opérations et relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

(1.4)

A l'école primaire, on apprend à ajouter, multiplier, composer les éléments de $\mathbb{R}$.

Proposition On peut définir sur $\mathbb{R}$ une addition $+$ et une multiplication $\times$ (ou $\cdot$) qui prolonge l'addition et la multiplication de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes

- COMMUTATIVITÉ pour tous a, b , dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ ab &= ba \end{aligned}$$

- ASSOCIATIVITÉ pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} a+(b+c) &= (a+b)+c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

- DISTRIBUTIVITÉ pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$, on a

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

- ÉLÉMENTS NEUTRES pour tout a dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} a+0 &= a \\ a \cdot 1 &= a \\ a \cdot 0 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{"neutre"} \\ \text{"absorbant"} \end{array}$$

Pour démontrer la proposition, il faut donner un algorithme qui explique comment ajouter / multiplier deux nombres réels, puis vérifier tout ça (fastidieux).

Proposition On peut définir sur $\mathbb{R}$ une relation d'ordre $\leq$ qui prolonge l'ordre de $\mathbb{N}$ et vérifie les règles suivantes

- REFLEXIVITÉ Pour tout a dans $\mathbb{R}$, $a \leq a$
- ANTISYMETRIE Pour tous a, b dans $\mathbb{R}$, si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$
- TRANSITIVITÉ Pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$, si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$
- ORDRE TOTAL Pour tous a, b dans $\mathbb{R}$, on a $a \leq b$ ou* $b \leq a$
- COMPATIBILITÉ avec $+$ Pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
- COMPATIBILITÉ avec $\times$ Pour tous a, b, c dans $\mathbb{R}$ si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.

* En maths, "ou" veut dire "l'un ou l'autre, ou les deux à la fois"

On écrit alors

- $a \geq b$ lorsque $b \leq a$
- $a < b$ lorsque $a \leq b$ et $a \neq b$
- $a > b$ lorsque $a \geq b$ et $a \neq b$

(ce qui revient à dire que $b < a$)

La négation logique (= contraire) de $a \leq b$ est $a > b$.

Attention : ne pas confondre $\leq$ et $<$

$\leq$ "inférieur ou égal" inégalité large
 $<$ "strictement inférieur" inégalité stricte.

Eviter d'écrire "inférieur à" qui est ambigu.

La plupart du temps, le signe qu'on veut utiliser est $\leq$.

C'est un bon réflexe d'utiliser $\leq$ et $\geq$ par défaut.

[Exemple : soit x un réel. Alors $x^2 \geq 0$.]

(ce serait faux d'écrire $x^2 > 0$)

Autre piège courant : la mauvaise application des règles de compatibilité

① on ne peut pas soustraire des inégalités

$$\begin{array}{r} 3 \leq 5 \\ 1 \leq 4 \end{array} \quad \text{mais} \quad 3-1 \not\leq 5-4$$

② la multiplication par un nombre négatif change le sens des inégalités

$$-2 \leq -1 \quad \text{mais} \quad 4 \geq 2$$

multiplication par -2

pp

On peut par contre ajouter les inégalités : si $a \leq b$ et $c \leq d$
alors $a+c \leq b+d$.

1.3 Valeur absolue

1.7

Soit $a \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de a est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Elle vérifie les propriétés suivantes.

Pour a, b réels on a

• $\sqrt{a^2} = |a|$

• $|ab| = |a| \cdot |b|$

• $|a+b| \leq |a| + |b|$

• $|a-b| \geq ||a| - |b||$

avec égalité si et seulement si a et b ont le même signe

c'est l'inégalité triangulaire

c'est l'inégalité triangulaire inverse

1.4 Intervalles

Définition Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle s'il ne contient

pas de trou, c'est à dire

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } x \in I \\ y \in I \\ \text{et } z \in \mathbb{R} \text{ vérifie } x \leq z \leq y \end{array} \right\} \text{ alors } z \in I.$$

Proposition Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont du type suivant

- $\mathbb{R}$
- $\emptyset$, l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément
- ~~$\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$~~ (un singleton = ensemble à 1 élément)
- $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ ou $]a, +\infty]$ pour $a \in \mathbb{R}$
- $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$ pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$
- $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ (un singleton = ensemble à 1 élément).

Un intervalle du type $[a, b]$ (fermé et borné) est aussi appelé un segment.

1.5 Borne supérieure, Borne inférieure

(1.8)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est appelé un majorant de A s'il est ~~plus~~ supérieur ou égal à tout élément de A .

a majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \leq a$

↑
symbole "quel que soit" ou "pour tout".

De même, a est un minorant de A si $\forall x \in A \quad a \leq x$.

Exemple : 2 est un majorant de $[0, 1[$. 1 aussi
 $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant

Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est majorée si elle admet un majorant
minorée si elle admet un minorant
bornée si elle est majorée et minorée

Théorème de la borne supérieure (adms)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée.

Alors il existe un plus petit majorant de A , appelé borne supérieure de A et noté $\sup A$

De même, si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide minorée, il existe un plus grand minorant de A , appelé borne inférieure et noté $\inf A$

Par convention, si A n'est pas majorée, on pose $\sup A = +\infty$
si A n'est pas minorée, on pose $\inf A = -\infty$

Remarque : le théorème n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ n'a pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$.

$\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Proposition (caractérisation de la borne supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée, et $M \in \mathbb{R}$ un majorant de A

Alors $M = \sup A$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap]M-\varepsilon, M] \neq \emptyset$

ε : lettre grecque, "epsilon", utilisée pour désigner un nombre très petit.

Preuve. Supposons $M = \sup A$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon < M$ et donc

$M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A , donc il existe un élément x de A tel que $x > M - \varepsilon$.

Comme $x \in A$, on a $x \leq M$ donc $x \in]M - \varepsilon, M]$ et $A \cap]M - \varepsilon, M] \neq \emptyset$.

• Supposons $\forall \varepsilon > 0, A \cap]M - \varepsilon, M] \neq \emptyset$.

Il faut montrer que si m est un majorant de A , alors $M \leq m$. Par l'absurde: si $m < M$, soit $\varepsilon = M - m > 0$.

Alors l'intervalle $]M - \varepsilon, M] =]m, M]$ contient un élément de A , ce qui contredit le fait que m majore A .