

2.1 Fonctions

Une fonction est la donnée

- d'un ensemble de départ (ou domaine) E
- d'un ensemble d'arrivée (ou codomaine) F
- d'une flèche $f: E \rightarrow F$ qui associe à tout élément x de E un élément noté $f(x)$ de F

Exemples

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x+3$$

$$f_2: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f_3: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

f_2 et f_3 ne sont pas la même fonction car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On appelle $E \times F$ (le produit cartésien) de E et F l'ensemble $E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E, y \in F \}$.

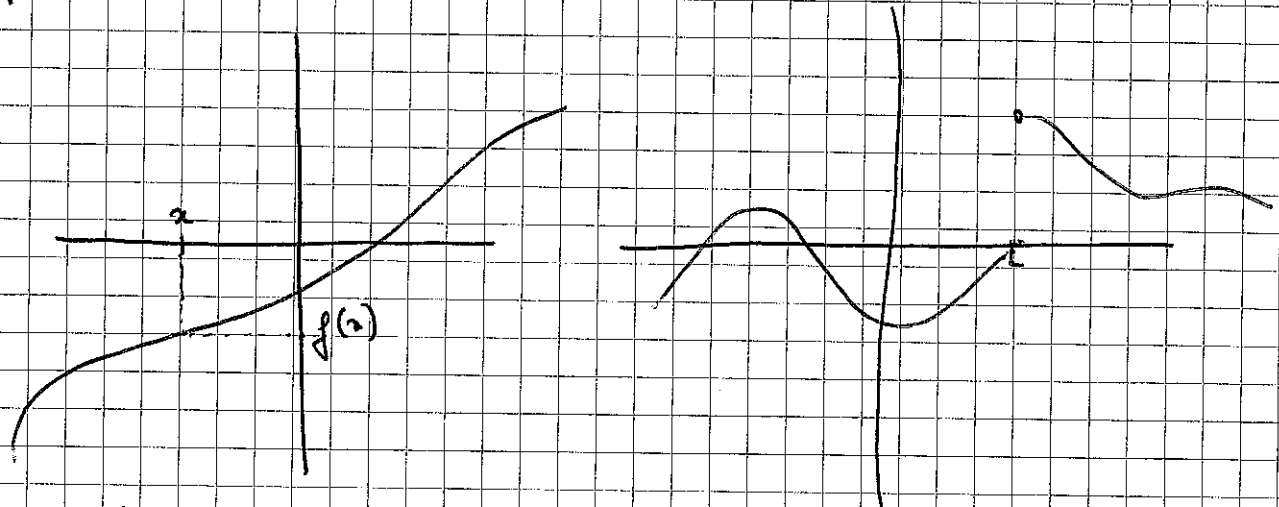
On pose $E^2 = E \times E$.

Le graphe de f est $\text{Gr}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in E \}$

c'est une partie de $E \times F$

lorsque $E = F = \mathbb{R}$, on parle de ~~variable~~ fonction réelle.

le graphe d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$,
on peut donc le dessiner.



Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est la graphe d'une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si toute droite verticale coupe A en exactement un point.

On parle aussi de fonction réelle lorsque E et F sont des parties de $\mathbb{R}$
(en général, des intervalles ou des réunions de deux intervalles comme $\mathbb{R}^+$)

2.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Concepts fondamentaux qui seront revus en algèbre 1.

Soient E, F des parties de $\mathbb{R}$ et $f: E \rightarrow F$ une fonction.

Si $x \in E$ et $y \in F$ sont tels que $f(x) = y$, on dit que

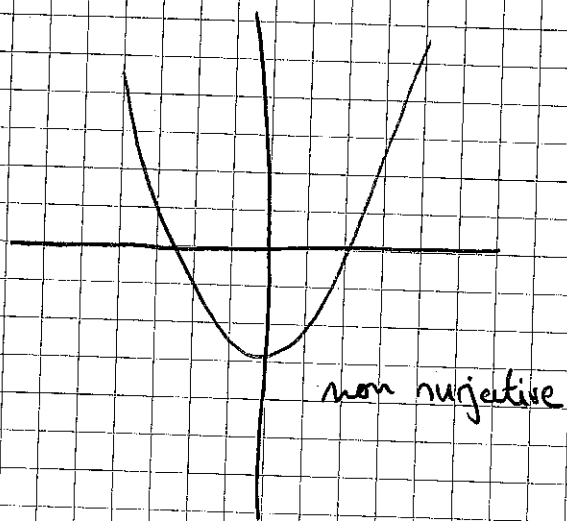
• y est l'image de x (on dit "l'image" et non "une image" car il n'y en a qu'une)
ou

• x est un antécédent de y (on dit "un antécédent" et non "l'antécédent" car il peut y en avoir plusieurs)

Définition On dit que $f: E \rightarrow F$ est surjective (ou : une surjection) (2.3)
 si tout élément de F admet au moins un antécédant
~~type~~ pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

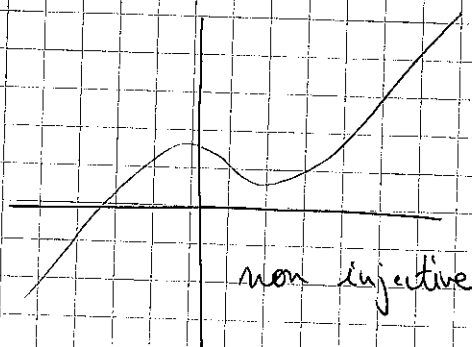
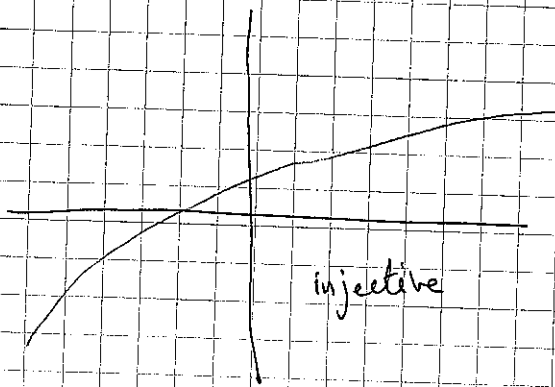
Lorsque $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f est surjective si et seulement si son graphe intersecte toutes les lignes horizontales



Définition On dit que $f: E \rightarrow F$ est injective (ou : une injection)
 si tout élément de F admet au plus un antécédant.

Ou encore : si x_1, x_2 dans E vérifient $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.

Ou encore : si x_1, x_2 dans E sont distincts ($x_1 \neq x_2$),
 alors $f(x_1) \neq f(x_2)$



Lorsque $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f est injective si et seulement si chaque ligne ~~de~~ horizontale intersecte le graphe en 0 ou 1 point.

(ou: une bijection)

Définition On dit que $f: E \rightarrow F$ est bijection si elle est injective et surjective. Cela revient à dire que tout élément de F a un unique antécédant

Soit $f: E \rightarrow F$ une bijection. On peut alors définir une application $f^{-1}: F \rightarrow E$ par la formule

$$\begin{aligned} F &\rightarrow E \\ y &\mapsto \text{l'unique } x \in E \text{ tel que } f(x) = y \end{aligned}$$

L'application $f^{-1}: F \rightarrow E$ est bijection et s'appelle la bijection réciproque de f .

On a alors les formules

$$\begin{aligned} \forall x \in E & \quad f^{-1}(f(x)) = x \\ \forall y \in F & \quad f(f^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

Exemple: la fonction $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x^2$ est
bijection et sa bijection réciproque
est la fonction $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \sqrt{x}$

2.3 Composition

Soient E, F, G des parties de $\mathbb{R}$
et $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ des fonctions.

On peut alors définir la composition de f et g comme la fonction

$$\begin{aligned} g \circ f: E &\rightarrow G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned} \quad \text{"g rond f"}$$

Attention: la composition $g \circ f$ n'est définie que si l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g

On appelle fonction identité (ou identité) d'un ensemble E
la fonction

$$\text{id}_E : E \rightarrow E \\ x \mapsto x$$

Si $f: E \rightarrow F$ est une bijection, alors

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_E \\ f \circ f^{-1} = \text{id}_F$$

Exemple de compositions

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sin(x)$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x+2$$

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x+2)$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x) + 2$$

2.4 Image directe, image réciproque

Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction

- Si A est une partie de E , l'image directe de A par f est

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \} \quad f(A) \subset F$$

- Si B est une partie de F , l'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E : f(x) \in B \} \quad f^{-1}(B) \subset E$$

Attention Cette définition ne suppose pas que f soit bijective

Si f est bijective, cela correspond à l'image directe de B par f^{-1} .

Exemple

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

(2.6)

$$f([1, 2]) = [1, 4]$$

$$f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

$$f(]-2, 1[) = [0, 4[$$

$$f^{-1}(]-2, 1[) =]-1, 1[$$

Propriétés Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction

• Si A, B sont des parties de E , alors

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

• Si C, D sont des parties de F , alors

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

Mais on n'a pas l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Par exemple avec

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

$$A = [1, 2[\quad B =]-2, 1[$$

$$f(A \cap B) = \emptyset$$

$$f(A) \cap f(B) = [0, 4[$$

2.5 Opération sur les fonctions

(2.5)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ g &: I \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

deux fonctions ayant le même ensemble de départ I On définit la somme

$$f+g: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

leur produit

$$fg: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)g(x)$$

et, si g ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire si $g(I) \subset \mathbb{R}^*$)leur quotient

$$\frac{f}{g}: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Attention à ne pas confondre le produit fg et la composition $f \circ g$

2.6 Propriétés des fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionOn dit que f est majorée / minorée / bornée sur I si il existe l'ensemble $f(I)$ est majoré / minoré / borné f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) \leq M$ f est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad m \leq f(x)$

On dit que f est croissante sur I si

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

_____ f est décroissante sur I si

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

_____ f est strictement croissante sur I si

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

_____ f est strictement décroissante sur I si

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

_____ f est monotone sur I si f est croissante sur I
ou décroissante sur I

_____ f est strictement monotone sur I si f est strictement
croissante sur I ou strictement décroissante sur I

Supposons que I est symétrique par rapport à 0 ($x \in I$ ssi $-x \in I$)

On dit que f est paire si $\forall x \in I$ ~~$f(x) = f(-x)$~~ $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = -f(x)$$

On dit que f est impaire si $\forall x \in I$ $f(-x) = -f(x)$

Enfin, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$. ($T > 0$)

2.7 Propriétés géométrique du graphe

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G_f son graphe ($G_f \subset \mathbb{R}^2$)

- Si on pose $f_1(x) = -f(x)$

Alors le graphe de f_1 est obtenu à partir ~~du graphe de f~~ ^{de G_f} par symétrie axiale par rapport à l'axe horizontal (Ox)

- Si on pose $f_2(x) = f(-x)$, alors le graphe de f_2 est obtenu à partir de G_f par symétrie axiale par rapport à l'axe verticale (Oy)
- Si on pose $f_3(x) = -f(-x)$, alors le graphe de f_3 est obtenu à partir de G_f par symétrie centrale par rapport à l'origine O

En particulier f paire $\Leftrightarrow G_f$ est symétrique par rapport à (Oy)

f impaire $\Leftrightarrow G_f$ est symétrique par rapport à O

- f est croissante $\Leftrightarrow$ toute droite passant par deux points de G_f a une pente ≥ 0

— croissante $\Leftrightarrow$

— ≤ 0

— strictement croissante $\Leftrightarrow$

— > 0

— strictement décroissante $\Leftrightarrow$

— < 0