

3.1 Fonctions polynômiales

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels

La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

est une fonction polynômiale de degré n

Cette fonction est dérivable et sa dérivée est

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

Cas particuliers

$n=0$ on obtient les fonctions constantes (pour $a_0 \in \mathbb{R}$)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a_0$$

Une fonction constante est croissante et décroissante

Réciproquement, une fonction croissante et décroissante est constante

$n=1$ on obtient les fonctions affines (pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b$$

Cette fonction est croissante ssi $a \geq 0$

strictement croissante ssi $a > 0$

Une fonction est affine ssi elle est dérivable, de dérivée constante

$n=2$

Fonctions trinômes

$a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$

(3.2)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

(si $a \neq 0$,
s'annule en
 $x = -\frac{b}{2a}$)

le graphe de f est une parabole

3.2 la fonction partie entière E

$\forall x \in \mathbb{R}$, il existe un unique ~~entier~~ entier relatif, noté $E(x)$,
tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$

$E(x)$ s'appelle la partie entière de x

$E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ est la fonction partie entière
 $x \mapsto E(x)$

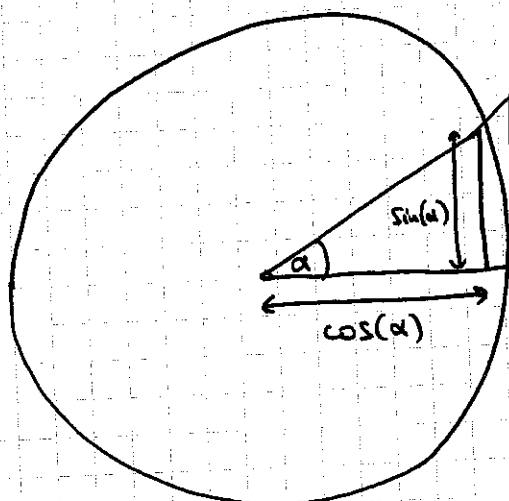
E est croissante mais pas strictement croissante
dérivable sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et de dérivée nulle
non continue en tout point de $\mathbb{Z}$

$x \mapsto x - E(x)$ est 1-périodique

$$E(3) = 3 \quad E(\pi) = 3 \quad E(-\pi) = -4$$

Fonctions trigonométriques

Définition géométrique



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \tan(x)$
domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
parité	impair	pair	impair
période	2π	2π	π
dérivée	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$x \mapsto 1 + \tan(x)^2$
primitive (à constante près)	$x \mapsto -\cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\ln \cos x $
graphe			

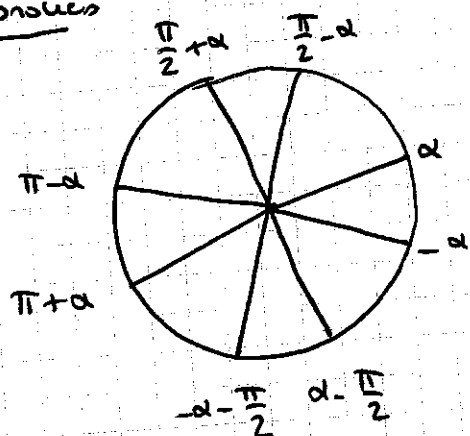
Il est commode de définir les fonctions sinus et cosinus via l'exponentielle complexe

~~$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$~~

~~$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$~~

~~$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$~~

Angles associés



Formules

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

Formules d'addition

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{cases}$$

"cosinus et
menteur et
raciste".

Cas particulier : $a = b$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \end{aligned}$$

d'où on déduit aussi

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

On démontrera ces formules (et d'autres) lors du chapitre sur les nombres complexes.

Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

→ on pourrait écrire
 $\frac{\sqrt{0}}{2} \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{4}}{2} !$

les valeurs de autres angles classiques s'en déduisent

$$\cos(\pi) = \cos(\pi + 0) = -1$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$