

3.4

Fonctions trigonométriques ~~reciproques~~

3.6

Les fonctions suivantes sont bijectives

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$$

On peut donc définir leurs bijections réciproques

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

On a alors

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\forall x \in [0, \pi]$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\forall y \in [-1, 1]$$

$$\forall y \in [-1, 1]$$

$$\forall y \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

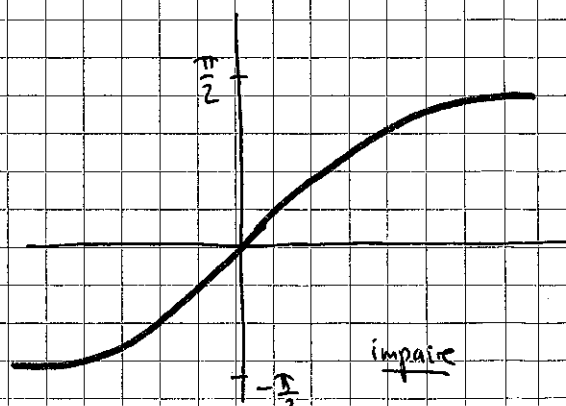
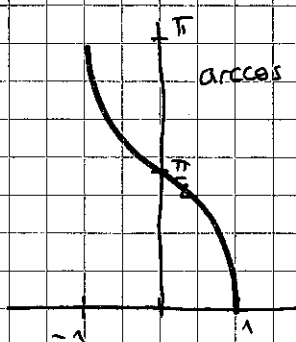
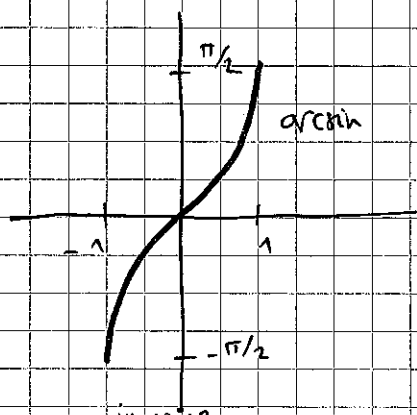
$$\arctan(\tan(x)) = x$$

$$\sin(\arcsin(y)) = y$$

$$\cos(\arccos(y)) = y$$

$$\tan(\arctan(y)) = y$$

⚠ pas
val
pour $x \in \mathbb{R}$

Mais on a par exemple $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$ 

On peut calculer leur dérivée

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1)$$

$$\forall x \in]0, \pi[\quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

Preuve de 1 : $\forall x \in]-1, 1[$

$$\cos^2 \arcsin(x) + \underbrace{\sin^2 \arcsin(x)}_{x^2} = 1$$

$$\text{donc } \cos^2 \arcsin(x) = 1 - x^2$$

$$\text{comme } \arcsin(x) \in]0, \pi[, \cos \arcsin(x) \geq 0 \quad \text{donc } \cos \arcsin(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{On dérive : } \underbrace{-\arcsin'(x) \sin \arcsin(x)}_{=x} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{et si } x \neq 0 \text{ on obtient } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve de 2 : parité

Preuve de 3 :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\tan \arctan(x) = x$$

donc

$$\arctan'(x) \cdot \tan' \arctan(x) = 1$$

$$\arctan'(x) \cdot [1 + \tan^2 \arctan(x)] = 1$$

$$\arctan'(x) \cdot (1+x^2) = 1$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(3.5)

Fonctions exponentielle et logarithme

(3.8)

Théorème : il existe une unique fonction dérivable $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$

telle que
$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est notée $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$
 $x \mapsto \exp(x)$

Elle vérifie la propriété fondamentale

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$$

On a aussi $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$



On écrit souvent e^x au lieu de $\exp(x)$

La fonction $\exp$ est strictement croissante ; c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Elle a pour limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

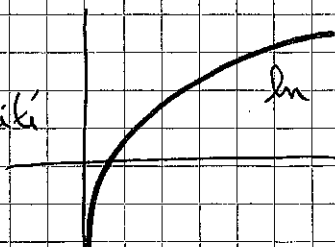
On peut donc définir le logarithme comme la bijection réciproque de ~~l'exponentielle~~ de l'exponentielle.

Définition Soit $x \in]0, +\infty[$. On note $\ln(x)$ l'unique réel vérifiant $\exp(\ln(x)) = x$

Propriétés la fonction $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective,
 strictement croissante, a pour limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.
 Sa dérivée est $\forall x > 0 \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$

Pour vérifier le dernier point, on dérive l'égalité

$$\exp(\ln(x)) = x$$



3.6 Fonctions hyperboliques

3.9

On définit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

cosinus hyperbolique

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

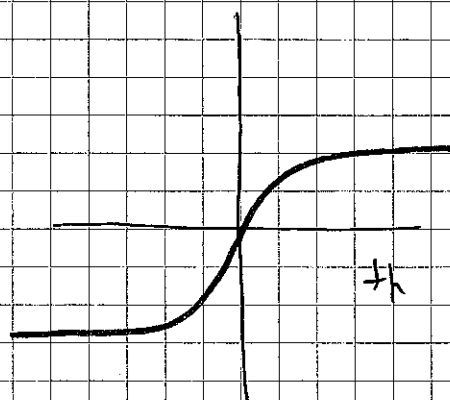
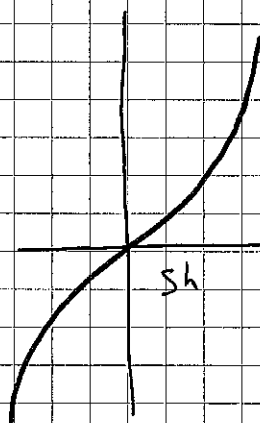
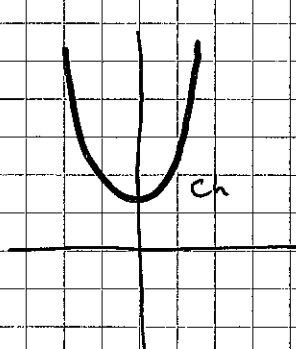
sinus hyperbolique

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

tangente hyperbolique

Propriétés

	ch	sh	th
domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
parité	paire	impaire	impaire
dérivée	sh	ch	$1 - \text{th}^2$
limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1
limite en $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-1



Formules

$$\operatorname{ch}(0) = 1 \quad \operatorname{sh}(0) = 0 \quad \operatorname{th}(0) = 0$$

(3,10)

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$(\text{preuve : } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4})$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

$$1. \quad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$$

$$2. \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)$$

$$\text{Preuve : } \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y}}{4}$$

$$\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}}{4}$$

d'où le
résultat
en ajoutant

pareil pour le 2

$$\text{Cas particulier} \quad \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$$

$$\text{Et donc aussi} \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2}$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}$$