

Fonctions puissances

18

Dans quel cas peut-on définir x^a

① Si $a \in \mathbb{N}$. On pose alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^a = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{a \text{ fois}} \quad \text{avec la convention } x^0 = 1$$

la fonction $x \mapsto x^a$ est une fonction polynomiale

Elle est paire si a est pair
impair si a est impair.

② Si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On pose alors, pour $a = -n$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x^a = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

~~la fonction $x \mapsto x^a$ est définie~~

③ Si $a = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

~~$\forall x \in \mathbb{R}^*$ on pose~~

$x^a = x^{\frac{1}{n}}$ est la racine n ème de x

Si n est pair elle est définie $\forall x \geq 0$

Si n est impair elle est définie $\forall x \in \mathbb{R}$

④ Si $a \in \mathbb{R}$. On définit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$x^a = \exp(a \ln(x))$$

les propriétés suivantes sont vraies dans tous les cas

19

$$1^a = 1 \quad \text{ou} \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad (x^a)^b = x^{ab}$$

$$(xy)^a = x^a y^a \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

la fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \mapsto ax^{a-1}$

Preuve

$$f(x) = x^a = \exp(a \ln(x))$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}$$

Croissances comparées

les fonctions $x \mapsto \exp(x)$
 $x \mapsto x^n$
 $x \mapsto \log x$ croissent vers l'infini $\rightarrow$ vite ($\exp$)
 $\rightarrow$ lentement ($\log$)

On a le résultat suivant

Théorème $\forall a, b, c$ dans $\mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{(\ln x)^c} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(ax)}{(\ln x)^c} = +\infty$$

Définition

On appelle suite réelle une fonction de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$.

B3.1
Suites

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto u_n$

Exemples de suites : $u_n = 3n + 7$ pour $n \in \mathbb{N}$

$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.



Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est
(penser aux parenthèses)

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$
- monotone si elle est croissante ou décroissante
- majorée si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$
- minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$
- bornée si elle est majorée et minorée

Remarque

① si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante alors

$$m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$$



(autrement dit, elle est croissante comme fonction de n dans $\mathbb{R}$)

En effet, on peut écrire $u_m \leq u_{m+1} \leq u_{m+2} \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n$.

② comme pour les fonctions, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|u_n|$ est majorée.

③ parfois l'ensemble d'indices est $\mathbb{N}^*$, ou $\{2, 3, 4, \dots\}$

On a ainsi $(u_n)_{n \geq 1}$ ou $(u_n)_{n \geq 2}, \dots$

(2)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut former les suites

$(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (produit des suites)

$(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (somme des suites)

$(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (multiplication par le réel λ).

"à partir d'un certain rang"

Une propriété $P(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) est vraie "à partir d'un certain rang" pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie

Exemple : $u_n = 2^n - 10n$ ($u_n)_{n \geq 0}$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2^{n+1} - 10(n+1)) - (2^n - 10n) \\ &= 2^n - 10 \geq 0 \quad \text{si } n \geq 4. \end{aligned}$$

Suites classiques

- Suite arithmétique de progression $r \in \mathbb{R}$

Elle est donnée par un premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$

et

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_0 + kr = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}$$

• Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$

Elle est donnée par un premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$

et
$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_0 q^k = \begin{cases} (n+1) u_0 & \text{si } q=1 \\ u_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

• Suite arithmético-géométrique

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}^*$. On la définit par récurrence par la formule $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n + r$.

Si $q=1$, c'est une suite arithmétique. On suppose donc $q \neq 1$.

Pour trouver l'expression de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on about $a = q a + r$
 $(\Rightarrow) \quad a = \frac{r}{1-q}$

et on a
$$u_{n+1} - a = q u_n + r - a$$

$$= q u_n + r - (q a + r) = q(u_n - a)$$

donc la suite $(u_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q

$$\boxed{u_n = a + (u_n - a) = a + q^n (u_0 - a)}$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n a + q^k (u_0 - a) = (n+1) a + (u_0 - a) \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

2 Convergence d'une suite

Voici la définition la plus importante du cours

Définition Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers l si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$;

on dit aussi que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite l .

Remarquons que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ équivaut à $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

Ainsi, la convergence de (u_n) vers l revient à dire que tout intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) contient les termes de (u_n) à partir d'un certain rang.

Exemple la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0.

Preuve Soit $\varepsilon > 0 \quad |u_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Posons $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ si $n \geq N$ alors $n+1 \geq N+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

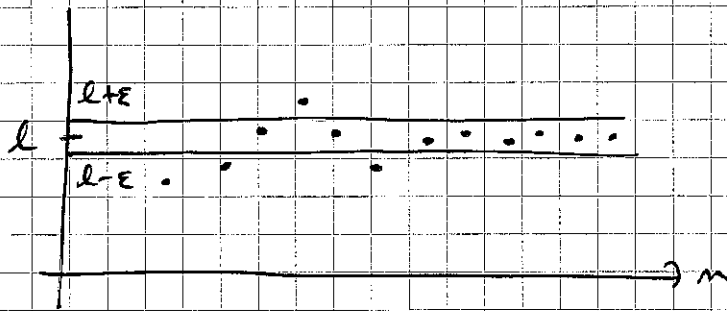
donc $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$

Ainsi le choix $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ convient

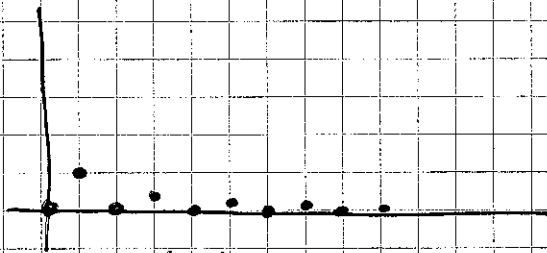
ce
N
dépend
de ε
car le
∃ est
après
le ∀

(5)

graphiquement, on peut représenter la convergence comme suit



Autre exemple : Posons $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$



Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$ et posons $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$.

si n est pair, alors $u_n = 0$ donc $|u_n - 0| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$

si n est impair, $n \geq N \geq \frac{1}{\varepsilon}$

donc $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ et $|u_n - 0| \leq \varepsilon$

On a montré (par disjonction de cas) que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Définition Soit (u_n) une suite

S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers l , on dit

que u_n converge

Si non, on dit que (u_n) diverge.

Ainsi, (u_n) converge



$$\exists l \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

(u_n) ne converge pas vers l



$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} n > N \text{ et } |u_n - l| > \varepsilon$$

ce qui revient à dire que

$\exists \varepsilon > 0$ tel que $\{n : |u_n - l| > \varepsilon\}$ est infini

(u_n) converge vers $l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |u_n - l| > \varepsilon\}$ est fini

Exemple

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$.

Cette suite diverge

En effet soit $l \in \mathbb{R}^+$. Alors $\forall n \in \mathbb{N} |u_{2n+1} - l| = |-1 - l| = l + 1 \geq 1$

donc (u_n) ne converge pas vers l

soit $l \in \mathbb{R}^-$. Alors $\forall n \in \mathbb{N} |u_{2n} - l| = |1 - l| \geq 1$

donc (u_n) ne converge pas vers l

Ainsi (u_n) ne converge pas, donc elle diverge

Propriétés fondamentales des suites convergentes

Théorème (unicité de la limite)

La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Autrement dit : si une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifie $\lim u_n = l_1$

pour l_1, l_2 réels, alors $l_1 = l_2$.

et $\lim u_n = l_2$