

Preuve

(7)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite qui converge vers l_1 et vers l_2 .

Supposons par l'absurde que $l_1 \neq l_2$.

Posons $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$; on a bien $\varepsilon > 0$.

Par définition de la convergence, on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| \leq \varepsilon$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors $|u_N - l_1| \leq \varepsilon$

$$|u_N - l_2| \leq \varepsilon$$

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_N| + |u_N - l_2| \leq 2\varepsilon \leq \frac{2}{3}|l_1 - l_2|$$

d'où $\frac{1}{3}|l_1 - l_2| \leq 0$ et $l_1 = l_2$ - contradiction

Ainsi $l_1 = l_2$ et la limite est unique

Voici un autre résultat fondamental

théorème Toute suite convergente est bornée

preuve soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Appliquons la définition de la limite avec $\epsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad l-1 \leq u_n \leq l+1$$

Posons

$$M = \max(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, l+1)$$

$$m = \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, l-1)$$

qui sont bien définies (le minimum / maximum d'un ensemble fini est bien défini).

Soit $n \in \mathbb{N}$. si $n \leq N$, alors $m \leq u_n \leq M$

• si $n \geq N$, alors $m \leq l-1 \leq u_n \leq l+1 \leq M$

On a donc (disjonction de cas)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n \leq M$$

ce qui montre que (u_n) est bornée.

Opérations sur les suites convergentes

théorème Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes, et α, β deux réels.

On suppose que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_2$.

Alors $\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha l_1 + \beta l_2$

preuve Si $\alpha = \beta = 0$ le résultat est évident.

Supposons donc $|\alpha| + |\beta| > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$

Par définition de la convergence,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a à la fois

$$|u_n - l_1| \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha l_1 + \beta l_2)| &\leq |\alpha u_n - \alpha l_1| + |\beta v_n - \beta l_2| \\ &\leq |\alpha| |u_n - l_1| + |\beta| |v_n - l_2| \\ &\leq |\alpha| \varepsilon_1 + |\beta| \varepsilon_1 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Théorème (produit)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles.

On suppose que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_2$

Alors $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1 l_2$

Preuve Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée :

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M + |l_2|}$

Par définition de la convergence, $\mathbb{R}$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |u_n - l_1| \leq \varepsilon_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$ on a d'la fois

$$|u_n - l_1| \leq \varepsilon_1 \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon_1.$$

$$\begin{aligned} \text{On écrit } |u_n v_n - l_1 l_2| &= |u_n v_n - u_n l_2 + u_n l_2 - l_1 l_2| \\ &\leq |u_n v_n - u_n l_2| + |u_n l_2 - l_1 l_2| \\ &\leq |u_n| \cdot |v_n - l_2| + |l_2| \cdot |u_n - l_1| \\ &\leq M \varepsilon_1 + |l_2| \varepsilon_1 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Théorème (inverse)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui se n'annule pas ($\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \neq 0$).

On suppose que $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ avec $l \neq 0$

Alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l}$

th On peut avoir $\forall n \ u_n \neq 0$ et $u_n \rightarrow 0$.

Preuve On écrit $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{u_n - l}{u_n l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n| \cdot |l|}$

Il faut donc majorer le numérateur u_n .

Appliquons la définition avec $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}$$

$$|u_n| \geq |l| - |u_n - l| \geq |l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ Posons $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \varepsilon |l|^2 > 0$

Par définition de la convergence,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |u_n - l| \leq \varepsilon_1$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - l| \leq \varepsilon_1$

$$|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n| \cdot |l|} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{|l|}{2} \cdot |l|} = \frac{\varepsilon}{|l|^2} = \varepsilon \quad \text{d'où le résultat.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|u_n|} &\leq \frac{2}{|l|} \\ \uparrow \\ |u_n| &\geq \frac{|l|}{2} \end{aligned}$$