

On peut passer à la limite dans les inégalités larges

théorème Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites vérifiant

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$$

$$\bullet u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1$$

$$\bullet v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_2$$

$$\text{Alors } l_1 \leq l_2$$

Preuve

Supposons par l'absurde que $l_1 > l_2$

$$\text{Posons } \varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{3} > 0.$$

Par définition de la convergence, il ~~est~~

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad u_n \geq l_1 - \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad v_n \leq l_2 + \varepsilon$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors

$$u_N \geq l_1 - \varepsilon = l_2 + 2\varepsilon > l_2 + \varepsilon \geq v_N$$

donc $u_N > v_N$, ce qui est une contradiction.

Donc $l_1 \leq l_2$ ■

Corollaire Si une suite $(u_n)_n$ converge vers l

$$(1) \text{ Si } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M \quad \text{alors } l \leq M$$

$$(2) \text{ Si } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m \quad \text{alors } l \geq m$$

Preuve: on applique le théorème précédent avec une des deux suites constante

théorème "des gendarmes"

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ trois suites telles que
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$.

On suppose que $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers $l \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_n$ converge vers l .

Exemple

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = \frac{\sin n}{n}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

donc

$$-\frac{1}{n} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

$\uparrow$ u_n $\uparrow$ w_n

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $u_n \rightarrow l$, $\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$
 (et donc $u_n \geq l - \varepsilon$)

Comme $w_n \rightarrow l$, $\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |w_n - l| \leq \varepsilon$
 (et donc $w_n \leq l + \varepsilon$)

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. $\forall n \geq N$ on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

donc $l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$,

donc $v_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, c'est à dire $|v_n - l| \leq \varepsilon$.

$$|v_n - l| \leq \varepsilon$$

On a montré $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$.

On prendra garde à vérifier toutes les hypothèses

① encodement

② convergence des "gendarmes"

vers la même limite.

Convergence et monotonie

Il existe des suites...

... convergentes et non monotones

(ex: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, tend

... monotones et non convergentes

vers 0 par le th. des gendarmes)

(par ex. $u_n = n^2$)

Théorème :

- Toute suite croissante majorée converge
- Toute suite décroissante minorée converge

La preuve utilise la propriété de la borne supérieure.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si $\forall x \in A$ $x \leq M$.

Ex $A =]-\infty, 0[$

$M = 1$ est un majorant de A

$M = 0$ est aussi un majorant de A

La borne supérieure de A (notée $\sup A$) est le plus petit des majorants.

Théorème (admis): toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.



$\sup A$ n'est pas forcément dans A .

Si $A =]-\infty, 0[$,

$\sup A = 0 \notin A$

Si $B = [0, 1]$

$\sup B = 1 \in B$

(de même on définit la borne inférieure de A (notée $\inf A$) comme le plus grand des minorants)

Remarque: il n'est pas vrai que la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{Q}$ est dans $\mathbb{Q}$

Ex

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$

$\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve du théorème (toute suite croissante majorée converge)

- Soit $(u_n)_n$ une suite croissante majorée. Alors $\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} u_n \in M$.

Posons $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

M est un majorant de A . Par le théorème admis, A admet une borne supérieure. Posons $l = \sup A$.

Comme l est un majorant de A on a $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq l$.

Soit $\varepsilon > 0$ $l - \varepsilon < l$ donc $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A

Ainsi $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > l - \varepsilon$.

Comme $(u_n)_n$ est croissante, on a $\forall n \geq N$

$$l \geq u_n \geq u_N > l - \varepsilon \quad \text{donc} \quad \textcircled{u_n - l \leq \varepsilon}$$

On a montré $\lim u_n = l$.

- Soit (v_n) une suite décroissante minorée. Posons $u_n = -v_n$.

Alors (u_n) est croissante majorée, donc converge par le premier cas.

Ainsi $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\lim u_n = l$, donc $\lim v_n = -l$.

Suites adjacentes

15

Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que

- (1) $(u_n)_n$ est croissante
- (2) $(v_n)_n$ est décroissante
- (3) $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0

Alors les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq l \leq v_n$$

Remarque Si on sait que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, alors

(3) implique que $\lim u_n = \lim v_n$.

Cependant, (3) n'implique pas que (u_n) et (v_n) convergent :

considérons $u_n = n \quad v_n = n + \frac{1}{n}$

(1) et (3) sont vérifiées, pas (2), et (u_n) et (v_n) divergent.



Si on suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$,

on n'a pas le droit d'écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

ni on n'a pas montré la convergence

Preuve Soit $w_n = v_n - u_n$; $(w_n)_n$ est décroissante comme somme de suites décroissantes $(v_n)_n$ et $(-u_n)_n$.

Par (3), on a $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$.

Comme $(w_n)_n$ décroît vers 0, on a $w_n \geq 0$ pour tout n ,
c'est à dire $u_n \leq v_n$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 \quad (*)$

les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont monotones et bornées,
donc convergentes par le théorème précédent.

Posons $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Alors $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_2 - l_1$,
donc $l_1 = l_2$.

Comme $(w_n) \quad \forall n \quad u_n \leq v_n$,

on a en passant à la limite d'un côté ou de l'autre
 $\forall n \quad l \leq v_n \quad \text{et} \quad u_n \leq l$

Exemple : Moyenne arithmético-géométrique

Soient $a, b > 0$. $\frac{a+b}{2}$ est la moyenne "arithmétique" (usuelle)

$\sqrt{ab}$ est la moyenne "géométrique".

On a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
(*)

$$\text{car} \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2$$

$$\text{donc} \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Supposons $a \leq b$

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

~~Montrons~~

Montrons que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes

- (1) (u_n) croissante?
- (2) (v_n) décroissante?

On a $\forall n \quad u_n \leq v_n$: si $n=0$ c'est parce que $a \leq b$
si $n > 0$ c'est * appliqué avec $a = u_{n-1}$ $b = v_{n-1}$.

On en déduit

$$\bullet \quad u_n^2 \leq u_n v_n \quad (\text{car } u_n \geq 0)$$

$$\text{d'où} \quad u_n \leq \sqrt{u_n v_n} = u_{n+1}$$