

et $\frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad v_{n+1}$

(17)

(3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n \quad (\text{car } u_n \leq u_{n+1})$
 $\quad \quad \quad = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$
 $\quad \quad \quad = \frac{v_n - u_n}{2}$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$
 $\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{P_n}$

En effet P_0 est vraie

et, si on suppose P_n , $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2} \leq \frac{1}{2} \frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

On a $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
0

et le théorème des gendarmes implique $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$

Ainsi $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient (1)-(2)-(3) ; ce sont des suites adjacentes qui convergent donc vers la même limite l , qui s'appelle la moyenne arithmétique géométrique de a et b .

Suites extraites ou sous-suites

Principe On a une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on ne garde que certains termes (en nombre infini) pour former une nouvelle suite qu'on appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_n$

Exemple

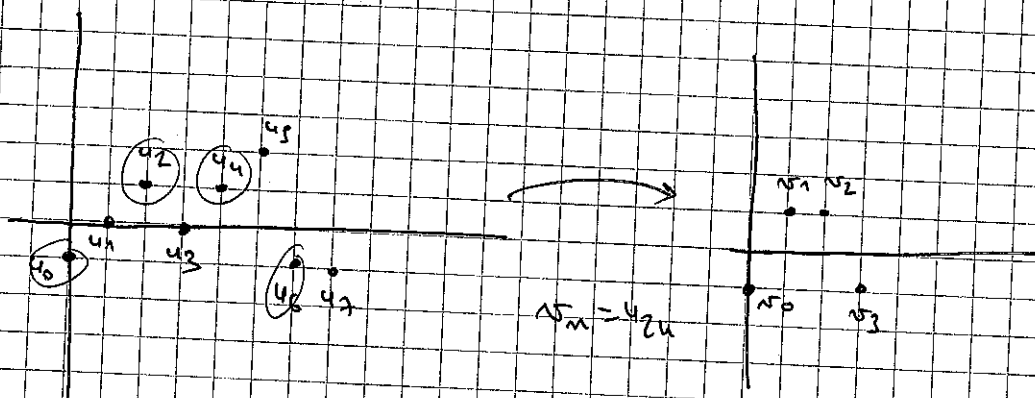
$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$
 $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
 $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ } sont des sous-suites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Voici la définition précise

Définition Une extraction est une fonction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante
 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite et φ une extraction,
 on dit que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite ou une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Propriétés Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Si $(u_n)_n$ est croissante, alors $(u_{\varphi(n)})_n$ est croissante
- Si $(u_n)_n$ est décroissante, alors $(u_{\varphi(n)})_n$ est décroissante
- Si $(u_n)_n$ est majorée, alors $(u_{\varphi(n)})_n$ est majorée
- Si $(u_n)_n$ est minorée, alors $(u_{\varphi(n)})_n$ est minorée
- Si $(u_n)_n$ converge vers l , alors $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers l (exercices)



Important : Même quand $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, il se peut qu'une sous-suite converge.

Ex $u_n = (-1)^n$ c'est la suite $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
 qui ne converge pas

la sous-suite $(u_{2n})_n$ converge vers 1 (elle est constante égale à 1)
 la sous-suite $(u_{2n+1})_n$ converge vers -1 (elle est constante égale à -1)

Proposition Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Alors

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

$\Rightarrow$ conséquence de la propriété précédente

$\Leftarrow$ exercice

Théorème de RANNEY Toute suite admet une sous-suite monotone

Preuve Soit (u_n) une suite

$$\text{et } E = \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n \quad u_m \leq u_n \}$$

1^{er} cas E est fini, donc majoré par un entier N

$$(*) \quad \forall n > N \quad n \notin E \text{ donc } \exists m > n \quad u_m > u_n$$

On définit alors par récurrence une extraction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{par } \varphi(0) = N+1$$

$$\text{et, étant donné } \varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(k),$$

$$\text{on choisit } \varphi(k+1) \text{ tel que } u_{\varphi(k+1)} > u_{\varphi(k)}$$

$$[\text{possible par } (*), \text{ puisque } \varphi(k) > N \text{ donc } \varphi(k) \notin E]$$

On a construit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ strictement croissante

2^{ème} cas E est infini. On peut donc écrire

$$E = \{ \varphi(0), \varphi(1), \dots \} \quad \text{pour une extraction } \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{donc } \forall k \in \mathbb{N} \\ \varphi(k) \in E \\ \varphi(k+1) > \varphi(k) \end{array} \right\} \Rightarrow u_{\varphi(k+1)} \leq u_{\varphi(k)} \text{ par définition de } E$$

Ainsi $(u_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite décroissante.

Théorème de BOLZANO - WEIERSTRASS

(22)

|| Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Autrement dit : si $(u_n)_n$ est bornée, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge.

Exemple $u_n = (-1)^n$ $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent

$$u_n = \cos(n)$$

il n'est pas facile de donner un exemple de sous-suite qui converge, mais on sait qu'il en existe par le théorème de B-W.

(Remarque : en fait, $\forall l \in [-1, 1]$, il existe une extraction φ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = l$)

Preuve

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée.
Par le théorème de RAMSEY, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ est monotone.

Comme $(u_{\varphi(n)})_n$ est monotone et bornée, elle converge.

Limites inférieures

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

$$\text{On écrit alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

⚠ NE PAS UTILISER
" (u_n) converge vers $+\infty$ ",

le mot "converge"
est réservé aux limites finies

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$$

$$\text{On écrit alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

théorème

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante. Il y a deux possibilités

- ou bien $(u_n)_n$ converge
- ou bien $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

Preuve

- Si (u_n) est majorée, elle converge
(toute suite croissante majorée converge)

- Si (u_n) n'est pas majorée

Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_n$ n'est pas majorée par A ,
il existe N tel que $u_N > A$

Comme $(u_n)_n$ est croissante

$$\forall n \geq N \quad u_n \geq u_N > A$$

ce qui montre $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Encore un exemple de suite !!

$$u_n = n(-1)^n$$

u_n n'est pas bornée, mais ne tend ni
vers $+\infty$ ni vers $-\infty$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = -\infty$$

théorèmes de comparaison

- ① Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

ALORS

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$$