

(2)

Théorème Soit $(u_n)_n$ une suite croissante. Il y a deux possibilités

- ou bien $(u_n)_n$ converge
- ou bien $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

Preuve :

- Si $(u_n)_n$ est majorée, elle converge
(toute suite croissante majorée converge)

- Si $(u_n)_n$ n'est pas majorée

Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_n$ n'est pas majorée par A ,
il existe N tel que $u_N > A$

Comme $(u_n)_n$ est croissante

$$\forall n \geq N \quad u_n \geq u_N > A$$

ce qui montre $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ ■

Encore un exemple de suite !!

$u_n = n(-1)^n$ u_n n'est pas bornée, mais ne tend ni
vers $+\infty$ ni vers $-\infty$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = -\infty$

Théorèmes de comparaison

① Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$

et

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

ALORS

$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$

② Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$

ALORS $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

C'est la version " ∞ " du théorème de gendarmes.

FORMES INDETERMINÉES (F.I.)

Les résultats sur la somme / le produit de suites convergentes ne s'étendent pas forcément au cas de suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$

<u>SOMME</u> (ici $l \in \mathbb{R}$)	<u>HYPOTHESES</u>		<u>CONCLUSION</u>
	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n)$
	l	$+\infty$	$+\infty$
	l	$-\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	<u>(F.I.)</u> on ne peut pas conclure

De même, les différences

" $+\infty$ " - " $+\infty$ " et " $-\infty$ " - " $-\infty$ "

sont indéterminées

PRODUIT

(ici $l \in \mathbb{R}$)

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	<u>F.I.</u>
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$-\infty$	<u>F.I.</u>
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

QUOTIENT

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	<u>F.I.</u>
0	0	<u>F.I.</u>
0 0	$+\infty$ $-\infty$	0 0
$+\infty$ $-\infty$	0 0	<u>F.I.</u> <u>F.I.</u>

← on suppose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$
pour que ce soit bien défini

peuvent être levés si on connaît le signe de v_n

si $v_n > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = 0 \end{array} \right.$

impliquent $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

Quand on a une forme indéterminée, la suite correspondante peut

- converger vers n'importe quelle limite
- tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$
- autre...

ex

$$u_n = n$$

$$v_n = n + 42$$

$$v_n - u_n = 42 \rightarrow 42$$

$$v_n' = n - \sqrt{n}$$

$$v_n' - u_n = -\sqrt{n} \rightarrow -\infty$$

$$v_n'' = n + (-1)^n$$

$$v_n'' - u_n = (-1)^n \text{ ne converge pas}$$

Une autre F.I. est " 1^∞ "

$$\text{Si } \lim u_n = 1 \quad \lim v_n = +\infty$$

On ne peut pas conclure qu'on a la limite de $u_n^{v_n}$

$$\text{En effet } u_n^{v_n} = \exp\left(v_n \cdot \underbrace{\ln(u_n)}_{\xrightarrow{+\infty} 0}\right)$$

et on retrouve la F.I. " $+\infty \times 0$ ".

$$\text{Exemple } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Chapitre 7

ARITHMÉTIQUE

arithmétique = étude de la division dans $\mathbb{Z}$ et des nombres premiers.

Définition Soient $a, b \in \mathbb{Z}$

On dit que a est multiple de b (ou que b est diviseur de a)

si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b \cdot k$

Ex 6 est multiple de 3 3 est diviseur de 6

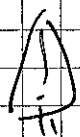
6 est multiple de -2 -2 est diviseur de 6

Définition On dit que $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ est premier

si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p

Ex: 6 n'est pas premier (2 et 3 sont des diviseurs positifs autres que 1 et 6)

$2, 3, 5, 7, 11, 13 \dots$ sont premiers



1 n'est pas premier
les nombres premiers sont ≥ 2 .

Théorème (EUCLIDE) Il existe une infinité de nombres premiers

Une autre F.I. est " 1^∞ "

Si $\lim u_n = 1$, $\lim v_n = +\infty$, on ne peut pas conclure quand à la limite de $u_n^{v_n}$. En effet $u_n^{v_n} = \exp(\underbrace{v_n}_{+\infty} \underbrace{\ln(u_n)}_0)$ et on retrouve la F.I. " $+\infty \times 0$ ".

Exemple On peut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

Notations asymptotiques

Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives

On écrit $u_n = O(v_n)$ si $\exists A > 0 \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq A v_n$

$u_n = o(v_n)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$

[si la suite $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 0, elle est majorée]

On écrit $u_n \sim v_n$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (u_n et v_n sont équivalents)

On écrit $u_n = \Omega(v_n)$ si $v_n = O(u_n)$

$u_n = \Theta(v_n)$ si $u_n = \Omega(v_n)$ et $v_n = \Omega(u_n)$

Exemple

$$\log n = O(\sqrt{n})$$

$$\log n = o(\sqrt{n})$$

$$4n^2 + 2n + 3 = O(n^2)$$

$$4n^2 + 2n + 3 = \Theta(n^2)$$

Suite de Cauchy sa limite

Un moyen de dire qu'une suite converge sans dire

(u_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq N \quad \forall n \geq N \quad (u_m - u_n) < \varepsilon$$

théorème

(u_n) est de Cauchy $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}$ tq $u_n \rightarrow l$.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

et $x_0 \in I$, ou alors x_0 une borne de I (éventuellement $\pm\infty$).

On y aimerait définir " $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ".

Il y a différents cas selon que $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ est fini ou infini} \\ l \text{ est fini ou infini} \end{array} \right.$

1^{er} cas $x_0 \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{R}$

- On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que si $|x - x_0| \leq \delta$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$

2^{ème} cas $x_0 \in \mathbb{R}$ $l = +\infty$ ou $-\infty$

- On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si
 $\forall A \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ tel que si $|x - x_0| \leq \delta$ alors $f(x) \geq A$
- On dit que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si
 $\forall A \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ tel que si $|x - x_0| \leq \delta$ alors $f(x) \leq A$

3^{ème} cas $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$ $l \in \mathbb{R}$

- On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si
 $\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbb{R}$ tel que si $x \geq B$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$
- On dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ si
 $\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbb{R}$ tel que si $x \leq B$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$

général $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$ $l = +\infty$ ou $-\infty$

(2)

- On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si
 $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R}$ tel que si $x \geq B$ alors $f(x) \geq A$
- On dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si
 $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R}$ tel que si $x \geq B$ alors $f(x) \leq A$
- On dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si
 $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R}$ tel que si $x \leq B$ alors $f(x) \geq A$
- On dit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si
 $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R}$ tel que si $x \leq B$ alors $f(x) \leq A$

Théorème (caractérisation séquentielle des limites)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un point ou une borne de I et $l \in \mathbb{R}$ ou $l = +\infty$ ou $l = -\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff$ pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l$