Chapitre 1

Géométrie affine

On travaille sur un corps $\mathbf{K}$. Dans la plupart des cas, ce sera $\mathbf{R}$ mais on pourra parfois considérer d'autres corps comme $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ ou les corps finis. Tous les espaces vectoriels considérés seront sur le corps $\mathbf{K}$ et de dimension finie.

1.1 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Avant de définir les espaces affines abstraits, revenons sur le cas plus concret des sous-espaces affines d'un espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel. Pour tout x dans E, la translation de vecteur x est l'application $\tau_x : E \to E$ définie par $y \mapsto x + y$. L'application τ_x est bijective et $\tau_x^{-1} = \tau_{-x}$. Elle est linéaire uniquement dans le cas $x = 0$. On a de plus $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$: l'ensemble des translations forme un groupe isomorphe à $(E, +)$.

On dit qu'une partie $\mathcal{F} \subset E$ est un *sous-espace affine* (s.e.a.) s'il existe $x \in E$ et un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tels que

$$\mathcal{F} = \tau_x(F) = x + F = \{x + y \ : \ y \in F\}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement $x \in \mathcal{F}$ puisque $0 \in F$. Si x_1 et x_2 sont dans $\mathcal{F}$, alors $x_1 - x_2 \in F$: on retrouve F comme l'ensemble des différences entre éléments de $\mathcal{F}$. En particulier, le sous-espace vectoriel F est unique. On dit que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de direction F passant par x. Bien sûr, x n'est pas uniquement déterminé par cette condition : pour tout x' dans $\mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = x' + F$.

Un sous-espace vectoriel $E \subset V$ est stable par combinaisons linéaires : pour des familles finies $(x_i)_{i \in I}$ dans E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ dans $\mathbf{K}$ on a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in E$$

(cela se démontre par récurrence sur $|I|$; pour $|I| = 2$ c'est la définition de sous-espace vectoriel). Les combinaisons linéaires permettent d'expliciter la notion d'espace vectoriel engendré : si (E_i) est une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de V, leur intersection $\bigcap E_i$ est aussi un sous-espace vectoriel. On peut donc définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie $A \subset V$, noté $\mathrm{Vect}(A)$, comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces vectoriels contenant A. On peut aussi l'écrire comme

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \ : \ I \text{ fini }, \lambda_i \in \mathbf{K}, x_i \in A \right\}$$

puisque le membre de droite forme un sous-espace vectoriel qui est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.

De la même manière, on peut définir le sous-espace affine engendré par une partie $A \subset V$. On pourrait rester dans le cadre "concret" des sous-espaces affines d'un espace vectoriel, mais pour des applications ultérieures il est utile de disposer d'une notion abstraite d'espace affine.

1.2 Espaces affines abstraits

Dans l'exemple d'un sous-espace affine $\mathcal{F} = x + F \subset E$ du paragraphe précédent, les points (les éléments du sous-espace affine $\mathcal{F}$) et les vecteurs (les éléments du sous-espace vectoriel F) sont tous deux inclus dans E. Dans la définition d'un espace affine abstrait, ce n'est pas le cas ; il n'est pas possible de définir $2M$ où $M + N$ pour des points M, N de $\mathcal{F}$.

[faire un dessin]

Rappelons le vocabulaire des actions de groupes. Une action d'un groupe G (d'élément neutre e) sur un ensemble X est la donnée d'une fonction $\mu : G \times X$ dans X qui vérifie les axiomes $\mu(e, x) = x$ et $\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$ pour tous g, h dans G et $x \in X$. Il est habituel d'écrire $g \cdot x$ plutôt que $\mu(g, x)$, voire $x + g$ lorsque le groupe G est abélien.

On dit qu'une action est *simplement transitive* si pour tous x, y dans X, il existe un unique $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Autrement dit, pour tout x dans X, l'application $g \mapsto g \cdot x$ est une bijection de G sur X.

Définition. On appelle *espace affine* la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide et d'une action simplement transitive de $(E, +)$ sur $\mathcal{E}$, où E est un espace vectoriel. On dit que E est la direction de $\mathcal{E}$. On appelle dimension de $\mathcal{E}$ la dimension de E. On appelle droite affine un espace affine de dimension 1, plan affine un espace affine de dimension 2.

Dans ce contexte, le éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les points et sont habituellement notés par des lettres majuscules $A, B, C, M, \ldots$. Les éléments de E sont appelées les vecteurs et habituellement notés par des symboles comme $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$. L'action est notée additivement : $A + \overrightarrow{u}$ est un point.

Exemple. L'action de $(V, +)$ sur V par translation $\mu(x, y) = x + y$ est simplement transitive (comme pour tout groupe) : tout espace vectoriel peut donc être vu comme un espace affine.

Étant donnés deux points A et B de $\mathcal{E}$, on note $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément de E tel que $A + \overrightarrow{AB} = B$. L'axiome d'action de groupe donne immédiatement la relation de Chasles

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On a également $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Un espace affine est un espace vectoriel qui a oublié son origine. On a vu que tout espace vectoriel peut naturellement être vu comme un espace affine. Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est un espace affine d'espace directeur E, tout choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ induit une bijection $\mathcal{E} \to E$

$$M \to \overrightarrow{OM}$$

On peut via cette bijection munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace vectoriel (le «vectorialisé en O»), dans lequel le zéro est O, mais ce choix n'est pas canonique. Dans les preuves, on commence souvent par choisir une origine O pour remplacer tous les points M par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$.

On appelle *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ l'orbite d'un sous-espace vectoriel de E, c'est à dire un sous-ensemble de la forme

$$\mathcal{F} = \{M + \overrightarrow{u} \ : \ \overrightarrow{u} \in F\}$$

où $M \in \mathcal{E}$ et F un sous-espace vectoriel de E. On a alors

$$F = \{\overrightarrow{AB} \ : \ A, B \in \mathcal{F}\}$$

et même pour tout choix de $O \in \mathcal{F}$

$$F = \{\overrightarrow{OM} \ : \ M \in \mathcal{F}\}.$$

En particulier, le sous-espace vectoriel F est unique, on l'appelle la direction de $\mathcal{F}$. On dit que deux sous-espaces affines sont parallèles (symbole $/\!/$) s'ils ont même direction (en particulier, cette définition impose qu'ils ont même dimension : une droite ne peut pas être parallèle à un plan). Dans le cas d'un espace vectoriel vu comme espace affine, on retrouve la définition précédente. On dira aussi qu'un sous-espace affine $\mathcal{E}_1$ (de direction E_1) est *faiblement parallèle* à un sous-espace affine $\mathcal{E}_2$ (de direction E_2) si $E_1 \subset E_2$.

Exercice. Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine. Vérifier que l'on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Dans ce cas, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice. Dans un espace affine, montrer que deux hyperplans affines disjoints sont parallèles.

Exercice. Soient $\mathcal{E}_1 = A_1 + E_1$ et $\mathcal{E}_2 = A_2 + E_2$ deux sous-espaces affines. Montrer qu'ils ont un point en commun si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1 + E_2$. Montrer qu'ils sont égaux si et seulement si $E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E_1$.

Exercice. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur le corps $\{0, 1\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$? Combien contient-il de droites affines ? Faire un dessin. Quelles droites sont parallèles ?

1.3 Barycentres

Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $A_1, \ldots, A_m$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dans $\mathbf{K}$ tels que $s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$. Il existe un unique point B de $\mathcal{E}$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1}$$

Ce point B est appelé *barycentre* du système pondéré $((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_m, \lambda_m))$ et noté

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_m \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

ou parfois $\mathrm{bar}((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_m, \lambda_m))$.

Exercice. Montrer que si la fonction de $\mathcal{E}$ dans E donnée par $B \mapsto \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ est bijective si $s \neq 0$ et constante si $s = 0$.

Par exemple, étant donnés deux points A et B de $\mathcal{E}$, on appelle milieu de A, B le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$. C'est le point M défini par la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$, où encore $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

Démonstration. Fixons un point $O \in \mathcal{E}$. Pour tout $B \in \mathcal{E}$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{BA_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_i}) = s\overrightarrow{BO} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

La condition (1.1) est donc satisfaite si et seulement si

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i},$$

ce qui est le cas pour un unique $B \in \mathcal{E}$. $\square$

Remarquons que si $A_1, \ldots, A_m$ appartiennent à un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, c'est aussi le cas de leur barycentre.

Par exemple, étant donné deux points A et B de $\mathcal{E}$, on appelle milieu du segment AB le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$. C'est le point M défini par la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Quand tous les poids sont égaux 1, on parle d'isobarycentre. Il faut faire attention quand on travaille avec des corps de caractéristique non nulle : par exemple, en caractéristique 2, un segment n'a pas de milieu...

On peut vérifier les propriétés suivantes des barycentres.

— Pour tout $\alpha \neq 0$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \alpha\lambda_1 & \alpha\lambda_2 & \ldots & \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$$

On peut ainsi se ramener au cas $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

— Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & A_{\sigma(2)} & \cdots & A_{\sigma(n)} \\ \lambda_{\sigma(1)} & \lambda_{\sigma(2)} & \cdots & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

— On peut retirer les points de poids nuls

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{n-1} & A_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{n-1} \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

— On peut regrouper les points identiques

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B & B \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \mu + \nu \end{pmatrix}$$

— On a la propriété d'associativité : si $m < n$ et si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \neq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & A_{m+1} & \ldots & A_n \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_m & \lambda_{m+1} & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $H = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_m \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}$.

Dans le cas d'un sous-espace affine d'un espace vectoriel, la notion de barycentre peut s'écrire à l'aide de la structure vectorielle : si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, alors

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

1.4 Indépendance et engendrement affines

Les notions de familles libres et génératrices sont fondamentales en algèbre linéaire. Nous allons développer l'analogue affine de ces notions.

Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $(\mathcal{F}_i)$ une famille de sous-espaces affines telle que $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcap \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.*

La preuve montrera aussi que l'intersection des directions est la direction de l'intersection.

Démonstration. Soit $O \in \bigcap \mathcal{F}_i$. Soit E la direction de $\mathcal{E}$. Pour tout i, on peut trouver un sous-espace vectoriel $E_i \subset E$ tel que $\mathcal{E}_i = O + E_i$. On a donc

$$\bigcap \mathcal{E}_i = \bigcap (O + E_i) = O + \bigcap E_i$$

qui est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. □

On peut donc définir le sous-espace affine $\operatorname{aff}(\mathcal{A})$ engendré par une partie non vide $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ comme l'intersection de la famille de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ qui contiennent $\mathcal{A}$ (cette famille est non vide car elle contient $\mathcal{E}$; l'intersection est non vide car $\mathcal{A} \neq \emptyset$).

Proposition. *Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{E}$, l'ensemble* $\operatorname{aff}(\mathcal{A})$ *est l'ensemble de tous les barycentres d'éléments de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des barycentres d'éléments de $\mathcal{A}$. On vectorialise : soit $O \in \mathcal{A}$. Un sous-espace affine contenant O est de la forme $O + F$ où F est un sous-espace vectoriel de E. Puisque $\mathcal{A} \subset O + F$ si et seulement si $\overrightarrow{OA} \in f$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, on en déduit donc que

$$\begin{aligned} \operatorname{aff}(\mathcal{A}) &= O + \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{OA} \ : \ A \in \mathcal{A}\} \\ &= \{O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \ : \ n \in \mathbf{N}, (\lambda_i) \in \mathbf{K}, A_i \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

Un élément M de $\operatorname{aff}(A)$ s'écrit $M = O + \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = (\sum \lambda_i)\overrightarrow{OM} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$. Ainsi, $(1 - \sum \lambda_i)\overrightarrow{MO} + \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$, donc

$$M = \begin{pmatrix} O & A_1 & \dots & A_n \\ 1 - \sum \lambda_i & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}. \tag{1.2}$$

On a montré que $\operatorname{aff}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ et l'inclusion réciproque découle du fait qu'un sous-espace affine est stable par barycentre. □

Fin cours # 1 du 16 janvier

Soient $A_1, \dots, A_p$ des points de $\mathcal{E}$. On dit que les points $A_1, \dots, A_p$ sont *affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_p}$ sont linéairement indépendants ; quand ce n'est pas le cas, on dit que les points $A_1, \dots, A_p$ sont *affinement liés.*

Proposition. *Soient $O, A_1, \dots, A_p$ des points de $\mathcal{E}$. Les points $A_1, \dots, A_p$ sont affinement liés si et seulement si il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$ et $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer, en écrivant $\overrightarrow{A_1A_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_1}$, que la relation $\lambda_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{0}$ équivaut à $-(\lambda_2 + \dots + \lambda_p)\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$. □

Cette proposition montre que la définition d'indépendance affine ne dépend pas de l'ordre des points. Deux points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont distincts (on note (AB) la droite engendrée par deux points $A \neq B$) ; trois points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non alignés ; quatre points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non coplanaires, etc.

On dit qu'une famille de points $(A_1, \ldots, A_p)$ est une *base affine* de $\mathcal{E}$ si c'est une famille affinement indépendante et affinement génératrice (au sens où $\mathcal{E} = \mathrm{aff}(A_1, \ldots, A_p)$). Cela équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \ldots, \overrightarrow{A_1A_p}$ forment une base de l'espace vectoriel E. Si $(A_1, \ldots, A_p)$ est une base affine de $\mathcal{E}$, alors nécessairement $\dim \mathcal{E} = p-1$. Tout point $M \in \mathcal{E}$ s'écrit comme barycentre

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_p \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

et cette écriture est unique si on impose $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$. On dit que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ sont les coordonnées barycentriques de M dans la base affine $(A_1, \ldots, A_p)$.

Il existe une autre manière de paramétrer les points d'un espace affine. On appelle *repère affine* de $\mathcal{E}$ la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de E. On obtient alors une bijection de $\mathbf{K}^n$ dans E donnée par

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto O + \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$$

Exercice. ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$). Soient ABC 3 points non alignés du plan affine. Les trois droites (AB), (AC) et (BC) délimitent 7 régions du plan. Connaissant les coordonnées barycentriques d'un point dans la base affine (A, B, C), comment déterminer à quelle région il appartient ?

Exercice. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine. Définir les médianes du triangle ABC et montrer qu'elles s'intersectent en un unique point.

Exercice. Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On appelle bimédiane du tétraèdre ABCD les droites passant par les milieux de deux arêtes disjointes du tétraèdre. Montrer que les trois bimédianes s'intersectent en un unique point.

Exercice difficile. Soit un ensemble fini de points du plan affine $\mathbf{R}^2$ ayant la propriété suivante : toute droite qui contient deux des points en contient au moins trois. Montrer que tous les points sont alignés. Donner un exemple de corps pour lequel l'énoncé analogue est faux.

1.5 Convexité

Dans cette section, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On va utiliser de manière cruciale les notions d'ordre et de positivité. Si A et B sont deux points d'un espace affine réel. Ils définissent un segment

$$[AB] = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ s & t \end{pmatrix} \ : \ s, t \geqslant 0, s + t > 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

On dit qu'une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est convexe si on a $[AB] \subset \mathcal{C}$ pour tous A et B dans $\mathcal{C}$.

Il est élémentaire de voir que l'intersection d'une famille quelconque de parties convexes est convexe. On peut donc définir l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A}$ d'un espace affine réel, notée $\mathrm{conv}(\mathcal{A})$, comme l'intersection de toutes les parties convexes contenant $\mathcal{A}$. On a la caractérisation équivalente suivante de l'enveloppe convexe comme l'ensemble des barycentres à poids positifs d'éléments de $\mathcal{A}$ (on parle parfois de combinaisons convexes).

Proposition. *Si $\mathcal{A}$ est une partie d'un espace affine réel, alors*

$$\operatorname{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \ : \ m \in \mathbf{N}^*,\ A_i \in \mathcal{A},\ \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \right\}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ le membre de droite dans l'équation précédente. Une partie convexe est stable par barycentres à poids positif (cela se démontre par récurrence sur le nombre de points en utilisant la propriété d'associativité des barycentres). On en déduit que toute partie convexe contenant $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{B}$, d'où l'inclusion $\operatorname{conv}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{B}$.

Par ailleurs, il découle aussi de la propriété d'associativité du barycentre que $\mathcal{B}$ est convexe, et donc que $\operatorname{conv}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. □

A priori, la description précédente nécessite de considérer des combinaisons convexes de longueur arbitrairement grande. Le résultat suivant permet de préciser ce point.

Théorème (Carathéodory)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace affine de dimension n. Alors*

$$\operatorname{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{n+1} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} \ : \ A_i \in \mathcal{A},\ \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \right\}.$$

Démonstration. Soit $A \in \operatorname{conv}(\mathcal{A})$. Soit $p \in \mathbf{N}$ minimal tel que A s'écrive

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

avec $A_i \in \mathcal{A}$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum \lambda_i = 1$. En fixant une origine $O \in \mathcal{A}$, on a donc

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

Supposons $p > n+1$. Alors les points $A_1, \dots, A_p$ sont affinement liés, et donc il existe des scalaires non tous nuls (μ_i) vérifiant $\mu_1 + \dots + \mu_p = 0$ et $\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_p \overrightarrow{OA_p} = \overrightarrow{0}$. On a donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \lambda_1 + t\mu_1 & \dots & \lambda_p + t\mu_p \end{pmatrix}$$

Soit $t > 0$ minimal tel que l'un des nombres $\lambda_i + t\mu_i$ soit nul (un tel t existe bien : les hypothèses sur (μ_i) impliquent qu'au moins l'un d'entre eux est strictement négatif). Pour ce choix de t, les scalaires $\lambda_i + t\mu_i$ sont $\geqslant 0$ et l'un d'entre eux est nul, ce qui permet d'écrire A comme barycentre de longueur $< p$, contredisant la minimalité de p. □

Exercice. Soit $\mathcal{A}$ une partie compacte de l'espace affine $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\operatorname{conv}(\mathcal{A})$ est compact.

Exercice. (Théorème de Radon) Dans un espace affine réel de dimension n, on considère une partie $\mathcal{A}$ de cardinal $n+2$. Montrer qu'il existe une partition $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ telle que $\operatorname{conv}(\mathcal{B}) \cap \operatorname{conv}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Exercice difficile. (Théorème de Helly) Soit $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de parties convexes d'un espace affine réel de dimension d, avec $n \geqslant d+1$. On suppose que toute sous-famille de cardinal $d+1$ a une intersection non vide. Montrer que $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} C_i$ est non vide. **Indication** : *Montrer le résultat par récurrence sur n en appliquant le théorème de Radon.*

1.6 Applications affines

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F. On dit qu'une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est *affine* si il existe une application linéaire $\phi : E \to F$ telle que, pour tous points M, N de $\mathcal{E}$ on ait

$$\phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}.$$

De manière équivalente, pour tous $M \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \in E$, on a

$$f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \phi(\overrightarrow{u}).$$

Si f est affine, l'application linéaire ϕ vérifiant cette condition est unique et appelée application linéaire *associée* à f. Elle est parfois notée $\overrightarrow{f}$.

Il est parfois utile, quand il n'y a pas d'ambiguïté, de noter M' l'image d'un point M par un application affine.

Exemple. Si $\overrightarrow{u} \in E$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application affine $M \mapsto M'$ définie $M' = M + \overrightarrow{u}$ ou encore $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Les translations sont les applications affines sont la partie linéaire est l'identité.

Exemple. Soit O un point de $\mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle *homothétie de centre O et de rapport* λ l'application affine $M \mapsto M'$ définie par la relation $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Quand $\lambda = -1$, on parle plutôt de *symétrie centrale*.

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine et $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée. Pour tout sous-espace affine $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ de direction E_1, l'image $f(\mathcal{E}_1)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{f}(E_1)$. On peut caractériser les applications affines comme celles préservant les barycentres.

Théorème. *Soient $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application entre espaces affines. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est affine.*
2. *Pour $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$*

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } f(M) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Fin cours # 2 du 23 janvier

Démonstration. On note M' l'image par f d'un point M. Supposons f affine. Si on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$$

alors par linéarité de l'application linéaire associée à f, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M'A'_i} = \overrightarrow{0}$$

d'où $1 \Longrightarrow 2$.

Pour la réciproque, soit $M \mapsto M'$ une application qui préserve les barycentres. Il faut montrer que l'application $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$ est bien définie et linéaire. Fixons un repère affine $(O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$. Posons $A_i = O + \overrightarrow{e_i}$. Un point quelconque $M \in \mathcal{E}$ s'écrit $M = O + \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$. On a donc

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

en on déduit (cette équation pouvant se réécrire comme un barycentre, cf (1.2)) que

$$\overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{O'A'_i}.$$

Soit $N = O + \mu_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \mu_n \overrightarrow{e_n}$ un autre point. On a donc

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overrightarrow{e_i}$$

et

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'} = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) \overrightarrow{A_i A'_i}.$$

Il s'ensuit que l'application $\overrightarrow{MN} \mapsto \overrightarrow{M'N'}$ est bien définie et linéaire (c'est l'unique application linéaire envoyant $\overrightarrow{e_i}$ sur $\overrightarrow{A_i A'_i}$), d'où le résultat. $\square$

La proposition suivante est très facile.

Proposition. *Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces affines. On note E_2 la direction de $\mathcal{E}_2$.*

1. *Soient $(O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ un repère affine de $\mathcal{E}_1$, P un point de $\mathcal{E}_2$ et et $\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}$ des vecteurs de E_2. Il existe une unique application affine de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ qui envoie O sur P et telle que l'application linéaire associée envoie $\overrightarrow{e_i}$ sur $\overrightarrow{f_i}$.*
2. *Soient $A_1, \dots, A_p$ une base affine de $\mathcal{E}_1$ et $B_1 \dots, B_p$ des points de $\mathcal{E}_2$. Il existe une unique application affine de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$ qui envoie A_i sur B_i.*

Exercice. Montrer qu'une application affine possède un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire associée.

Une application affine préserve l'alignement ; la réciproquement est partiellement vraie et connue sous le nom de théorème fondamental de la géométrie affine : une bijection d'un espace affine réel de dimension $\geqslant 2$ qui préserve l'alignement est affine. Pour se convaincre de la nécessité des hypothèses, on remarquera que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ préserve l'alignement, et que toute fonction entre espace affines sur le corps $\{0, 1\}$ préserve l'alignement.

Problème. (Théorème «fondamental» de la géométrie affine) Soit $\mathcal{E}$ le plan affine sur réel et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une bijection qui préserve l'alignement (c'est-à dire que si A, B, C sont trois points alignés, leurs images $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ sont alignées). On veut montrer que f est affine.

1. Montrer que l'image d'une droite est une droite ; que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles ; que l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.

2. Soit M un point et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur. On définit $\overrightarrow{v}$ par la relation $f(M+\overrightarrow{u}) = f(M)+\overrightarrow{v}$. Montrer que l'on peut définir une fonction $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par la formule $f(M+t\overrightarrow{u}) = f(M)+\lambda(t)\overrightarrow{v}$. Montrer que pour tous réels s,t on a $\lambda(s+t) = \lambda(s)+\lambda(t)$ et $\lambda(st) = \lambda(s)\lambda(t)$ (autrement dit, $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un automorphisme de corps). En déduire que $\lambda = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, puis que f est affine.
3. Donner un exemple de bijection du plan affine complexe $\mathbf{C}^2$ qui préserve l'alignement mais qui n'est pas affine.

1.7 Le groupe affine

Rappelons que si E est un espace vectoriel, on désigne par $\mathsf{GL}(E)$ le groupe des applications linéaires bijectives de E dans E. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E, on note $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Proposition. *La composition de deux applications affines est une application affine, et on a* $\overrightarrow{f_2 \circ f_1} = \overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$. *L'ensemble* $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ *est un groupe pour la loi de composition. L'application* $f \mapsto \overrightarrow{f}$ *est un morphisme de groupes de* $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ *dans* $\mathsf{GL}(E)$.

Démonstration. Soient f_1 et f_2 de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ deux applications affines de parties linéaires respectives $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$. Alors pour A, B dans $\mathcal{E}$

$$\overrightarrow{f_2(f_1(A))f_2(f_1(B))} = \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{f_1(A)f_1(B)}) = \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{AB}))$$

donc $f_2 \circ f_1$ est affine, et l'application linéaire associée est $\overrightarrow{f_2} \circ \overrightarrow{f_1}$.

Soit f une application affine. Fixons $O \in \mathcal{E}$. Alors f est l'application $M \mapsto f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ et donc f est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective ; dans ce cas l'application réciproque, donnée par $N \mapsto O + (\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{f(O)N})$ est affine. □

On dit qu'une transformation affine $f \in \mathsf{GA}(\mathcal{E})$ est une *dilatation* (on dit parfois : une *homothétie-translation*) si son application linéaire associée est $\lambda\mathrm{Id}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$ (on dit que λ est le rapport de f). L'image d'un sous-espace affine par une dilatation est un sous-espace affine parallèle.

Proposition.
1. *L'ensemble des dilations forme un sous-groupe de* $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$.
2. *Les dilatations de rapport* 1 *sont les translations.*
3. *Les dilatations de rapport* $\lambda \neq 1$ *sont les homothéties de rapport* λ *; leur seul point fixe est leur centre.*

Démonstration. Le seul point qui n'est pas évident est le dernier. Soit f une dilatation de rapport $\lambda \neq 1$. Fixons $O \in \mathcal{E}$. Un point M est fixé par f si et seulement si

$$M = f(M) = f(O) + \lambda\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{f(O)M} = \lambda\overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{Of(O)} = (1-\lambda)\overrightarrow{OM}$$

ce qui est le cas si et seulement si $M = O + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{Of(O)}$. Dans ce cas f est l'homothétie de centre M et de rapport λ, notée $h_{M,\lambda}$. □

Exercice. Déterminer la table du multiplication du groupe des dilatations en calculant $\tau_x \circ \tau_y,\ \tau_x \circ h_{M,\lambda},\ h_{M,\lambda} \circ \tau_x,\ h_{M,\lambda} \circ h_{N,\mu}$.

Exercice. Déterminer le centre du groupe $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$.

Exercice. Montrer que l'application de $E \times \mathsf{GL}(E)$ dans $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ donnée par $(x,\phi) \mapsto \tau_x \circ \phi$ est une bijection. Est-ce que les groupes $E \times \mathsf{GL}(E)$ et $\mathsf{GA}(\mathcal{E})$ sont isomorphes ?

1.8 Les théorèmes classiques de géométrie affine

Si A, B, C sont trois points alignés de $\mathcal{E}$ tels que $A \neq C$, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$. On définit alors

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \lambda.$$

Plus généralement, si A, B, C, D sont des points tels que $A \neq C$ et $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{AC}$, on pose $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \lambda$.

Théorème (Thalès)**.** *Dans un espace affine, soit ABB' des points affinement indépendants, et C, C' distincts des précédents tels que A, B, C et A, B', C' sont alignés. Alors*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} \iff (BB') \parallel (CC')$$

et si c'est le cas on a $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BB}}{\overline{CC'}}$

Démonstration. Il existe λ, μ dans $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB'} = \mu \overrightarrow{AC'}$. Alors $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{AC'} = (\lambda - \mu) \overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{CC'}$. Puisque $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont linéairement indépendants, on a $(CC') \parallel (BB')$ si et seulement si $\lambda = \mu$. Si c'est le cas, on a aussi $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{CA} + \lambda AC' = \lambda \overrightarrow{CC'}$. □

Proposition. *Dans un espace affine, soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles distinctes, $B \neq C$ deux points distincts de $\mathcal{D}$ et $C' \neq C'$ deux points distincts de $\mathcal{D}'$. Il existe une (unique) dilatation f telle que $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. C'est une translation si $(BB') \cap (CC') = \emptyset$ et sinon une homothétie de centre O, où $(BB') \cap (CC') = \{O\}$.*

Démonstration. $\mathcal{P} = \mathrm{aff}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') = \mathrm{aff}(B, C, B')$ est un plan ; dans ce plan les deux droites distinctes (BB') et (CC') sont soit disjointes, soit d'intersection réduite à un point.

Si $(BB') \cap (CC') = \emptyset$, alors $(BB') \parallel (CC')$. Il existe donc des scalaires λ et $\mu \in \mathbf{K}^*$ tels que $\overrightarrow{CC'} = \lambda \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \mu \overrightarrow{BC}$. On a $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \mu \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{BB'}$. Puisque $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont libres, on en déduit que $\lambda = \mu = 1$. Si on pose $\vec{v} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, alors la translation $\tau_{\vec{v}}$ convient.

Si $(BB') \cap (CC') = \{O\}$, alors $O \neq B$ et $O \neq B'$, donc il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$ tel que $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$. Puisque $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$, le théorème de Thalès implique que $\overrightarrow{OC'} = \lambda \overrightarrow{OC}$, donc l'homothétie de centre O et de rapport λ convient.

L'unicité est laissée en exercice. □

Fin cours # 3 du 6 février

Théorème (Pappus, version affine)**.** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{D}$ et A', B', C', trois points distincts de $\mathcal{D}'$. On suppose qu'aucun de ces points n'est commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$ alors $(AC') \parallel (A'C)$.*

Démonstration. On utilise la proposition précédente. Soit f la dilatation qui vérifie $f(A) = B$ et $f(B') = A'$, et soit g la dilatation qui vérifie $g(B) = C$ et $g(C') = B'$. Ce sont soit deux translations, soit deux homothéties de même centre. Dans les deux cas, elles commutent. Si on pose $h = g \circ f = f \circ g$, alors $h(A) = C$ et $h(C') = A'$. Comme h est une dilatation, on a donc $(AC') \parallel (A'C)$. □

Théorème (Desargues, version affine)**.** *Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un espace affine tels que A, B, C et A', B', C' soient affinement indépendants. On suppose que $(AB) \mathbin{/\!/} (A'B')$, $(BC) \mathbin{/\!/} (B'C')$ et $(AC) \mathbin{/\!/} (A'C')$. Alors les trois droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont soit concourantes, soit parallèles.*

Démonstration. Soit f la dilatation qui vérifie $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Alors $(AC) \mathbin{/\!/} (A'f(C))$ et $(BC) \mathbin{/\!/} (B'f(C))$ puisque l'image d'une droite par une dilation est une droite parallèle. On a donc $(A'C') = (A'f(C))$ et $(B'C') = (B'f(C))$. Puisque A', B', C' sont affinement indépendants, on a $(A'B') \cap (BC') = \{C'\}$ et donc $f(C) = C'$. Si f est une translation, les trois droites sont parallèles ; si f est une homothétie de centre M, les trois droites s'intersectent en M. $\square$

Théorème (Ménélaüs)**.** *Soient A, B, C trois points affinement indépendants. Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Les points A', B', C' sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$.*

Démonstration. Soit h_1 l'homothétie de centre A' vérifiant $h_1(B) = C$, soit h_2 l'homothétie de centre B' vérifiant $h_2(C) = A$ et soit h_3 l'homothétie de centre C' vérifiant $h_3(A) = B$. Si on note λ_i le rapport de h_i, alors

$$\lambda_1 = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}},\ \lambda_2 = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}},\ \lambda_3 = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

et ces rapports sont distincts de 1 puisque les points A, B, C sont distincts. La dilatation $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ a B comme point fixe et est donc une homothétie de rapport $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

L'application $h_2 \circ h_1$ préserve la droite $(A'B')$ puisqu'elle passe par le centre des deux homothéties. Ainsi h préserve $(A'B')$ si et seulement si h_3 préserve $(A'B')$, ce qui revient à dire (puisque $\lambda_3 \neq 1$) que les points A', B', C' sont alignés.

Comme $B \notin (A'B')$, l'homothétie h de centre B préserve $(A'B')$ si et seulement si son rapport est 1, d'où le résultat. $\square$

On énonce sans preuve un dernier théorème.

Théorème (Céva)**.** *Soient A, B, C trois points affinement indépendants. Soit $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = -1$.*

Chapitre 2

Géométrie projective

2.1 Premier contact

Commençons par donner une introduction informelle où on cherche à construire la géométrie projective afin de «compléter» la géométrie affine. Un plan affine $\mathcal{E}$ vérifie les deux propriétés suivantes

(A) Par 2 points (distincts) passe 1 droite (unique).

(B) 2 droites (distinctes) s'intersectent en 0 ou 1 point.

Il y a une asymétrie disgracieuse entre ces deux axiomes, on aimerait pouvoir remplacer «0 ou 1» par «1» dans (B).

Soit E la direction de $\mathcal{E}$. On note $\mathbf{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E et on pose

$$\mathbf{P} = \mathcal{E} \cup \mathbf{P}(E)$$

où l'union est disjointe. Autrement dit, on a rajouté un «point à l'infini» dans chaque direction. On appelle point un élément de $\mathbf{P}$ et on appelle droite une partie de $\mathbf{P}$ de la forme $\mathcal{D} \cup \{D\}$ où $\mathcal{D}$ est une droite affine et D est sa direction. On obtient ainsi une nouvelle notion de droite pour laquelle l'axiome (B) est vérifié.

Cependant, l'axiome (A) est en défaut car par deux points (distincts) à l'infini ne passe aucune droite. La solution est de décréter que $\mathbf{P}(E)$ est également une droite, dite droite de l'infini. Avec cette convention-là, les axiomes (A) et (B) sont satisfaits.

2.2 L'espace projectif associé à un espace vectoriel

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle l'*espace projectif associé à* E et on note $\mathbf{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E.

Si x et y sont des vecteurs non nuls de E, alors on a $\mathrm{vect}(x) = \mathrm{vect}(y)$ si et seulement si x et y sont proportionnels. Si on munit $E \setminus \{0\}$ de la relation d'équivalence

$$x \sim y \iff \mathrm{vect}(x) = \mathrm{vect}(y) \iff \exists \lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\} \ : \ x = \lambda y,$$

alors $\mathbf{P}(E)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\mathbf{P}(F)$ est un sous-ensemble de $\mathbf{P}(E)$ car toute droite vectorielle de F est une droite vectorielle de E. On dit qu'une partie $\mathcal{A} \subset P(E)$ est un *sous-espace projectif* (s.e.p.) s'il existe un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que $\mathcal{A} = \mathbf{P}(F)$.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, on définit la dimension de $\mathbf{P}(F)$ comme étant égale à $n-1$. Pour tout $x \in \mathbf{P}(E)$, l'ensemble $\{x\}$ est sous-espace projectif de dimension 0 ; on dira que x est un point de l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$.

On appelle droite projective un (sous-)espace projectif de dimension 1 et plan projectif un (sous-)espace projectif de dimension 2. Commençons par vérifier que cette construction respecte bien les propriétés (A) et (B).

Proposition. *Étant donnés deux points distincts d'un espace projectif, il existe une unique droite projective contient ces deux points.*

Démonstration. Il suffit de traduire l'énoncé en termes d'espaces vectoriels : si D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles distinctes d'un espace vectoriel E, alors il existe un unique plan vectoriel qui contient D_1 et D_2 : c'est le plan $\mathrm{vect}(D_1 \cup D_2)$. □

Proposition. *Deux droites projectives distinctes d'un plan projectif s'intersectent en un unique point.*

Démonstration. Soit $\mathbf{P}(E)$ un plan projectif (c'est-à-dire que E est un espace vectoriel de dimension 3) et $D_1 \neq D_2$ deux droites projectives distinctes de $\mathbf{P}(E)$. Il existe des sous-espaces vectoriels $F_i \subset E$, de dimension 2, tels que $D_1 = \mathbf{P}(F_1)$ et $D_2 = \mathbf{P}(F_2)$. Leur intersection $D_1 \cap D_2$ coïncide avec $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2)$. Comme $F_1 \neq F_2$, on a $F_1 + F_2 = E$ et la formule de Grassmann implique que

$$\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 + F_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

donc $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2)$ est un singleton. □

Fin cours # 4 du 27 février

On note $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{K}^{n+1})$, de sorte que la dimension de l'espace projectif $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ vaut n. Si $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note

$$(x_1 : \cdots : x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{P}_n(\mathbf{K})$$

Si $p = (x_1 : \cdots : x_{n+1})$, alors on a $p = (y_1 : \cdots : y_{n+1})$ si et seulement et si il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $x_i = \lambda y_i$ pour tout i.

Si $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, l'ensemble des points $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ vérifiant l'équation

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$$

est un hyperplan projectif de $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$, et tout hyperplan projectif s'obtient ainsi.

Proposition. *Si $\mathbf{K} = \mathbf{F}_q$ est le corps fini à q éléments, alors $\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$ a pour cardinal* $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + 1$.

Démonstration. Les points de $\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$ s'identifient à des classes d'équivalence pour la relation sur $\mathbf{F}_q^{n+1}$ donnée par $x \sim y$ s'il existe $\lambda \in \mathbf{F}_q^*$ tel que $x = \lambda y$. Comme $\mathbf{F}_q^*$ contient $q-1$ éléments, ces classes d'équivalences ont cardinal $q-1$, d'où le résultat. □

Le plan projectif sur $\mathbf{F}^2$ contient 7 éléments (dessin au tableau). On peut vérifier que les axiomes (A) et (B) sont vérifiés. Sauriez-vous tracer de manière similaire le plan projectif sur $\mathbf{F}^3$?

Exercice. Montrer qu'un plan projectif sur un corps fini contient autant de points que de droites.

2.3 Homographies, groupe projectif

Si $\mathbf{P}(E)$ est l'espace projectif associé à un espace vectoriel E, on note $\pi_E : E \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(E)$ la surjection canonique. Étant donné $A \subset \mathbf{P}(E)$, on note $\mathrm{proj}(A)$ le sous-espace projectif engendré par A qui est aussi $\mathrm{proj}(A) = \pi_E(\mathrm{vect}(\pi_E^{-1}(A))$.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire injective entre espaces vectoriels. Sa restriction à $E \setminus \{0\}$ est à valeurs dans $F \setminus \{0\}$. De plus, si x, y sont deux éléments de $E \setminus \{0\}$ tels que $x \sim y$, alors $f(x) \sim f(y)$. L'application f induit donc par passage au quotient une application $\mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}(F)$ définie par $\mathbf{P}(F)(\pi_E(x)) = \pi_F(f(x))$. On dit que $\mathbf{P}(f)$ est l'application projective associée à l'application linéaire f. On a $\mathbf{P}(f \circ g) = \mathbf{P}(f) \circ \mathbf{P}(g)$.

On appelle *homographie* une application projective associée à une bijection. On note $PGL(E)$ le groupe des homographies de $\mathbf{P}(E)$ dans lui-même, c'est le *groupe projectif.*

Proposition. *L'application $f \mapsto \mathbf{P}(f)$ est un morphisme de groupe de $GL(E)$ dans $PGL(E)$. Son noyau est le sous-groupe distingué $\{\lambda \mathrm{id} \ : \ \lambda \in \mathbf{K}^*\} \lhd GL(E)$.*

Démonstration. Un élément du noyau est une application linéaire $f \in GL(E)$ ayant la propriété que $f(x)$ et x sont proportionnels pour tout $x \in E$. On a vu en TD (feuille 1, exercice 12) que cela implique que f est un multiple de l'identité. $\square$

En particulier, le groupe projectif de $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ est isomorphe au groupe $PGL_{n+1}(\mathbf{K})$, quotient de $GL_{n+1}(\mathbf{K})$ par $\mathbf{K}^*$ identifié au sous-groupe des matrices scalaires inversibles.

Considérons maintenant le cas de la droite projective $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$. Un élément de la droite projective $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ est de la forme $(x_1 : x_2)$. Par définition, on appelle *abscisse projective* l'élément $x_1/x_2 \in \mathbf{K}$ si $x_2 \neq 0$, et ∞ si $x_2 = 0$. L'abscisse projective fournit une bijection de $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ sur $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$.

Une homographie h de $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ est induite par une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{K})$$

et vérifie

$$h((z:1)) = (az+b : cz+d) = \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right]$$

Son action sur les abscisses projectives est donc donnée par la formule

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}, \quad -\frac{d}{c} \mapsto \infty$$

2.4 Repères projectifs, coordonnées homogènes

On peut définir le sous-espace projectif engendré par une partie $A \subset \mathbf{P}(E)$ comme l'intersection de la famille de sous-espaces projectifs contenant A. On dit que $d+1$ points d'un espace projectif sont projectivement indépendants si le sous-espace engendré par ces points est de dimension d.

Si $v_1, \ldots, v_n \in E$, les points $\pi_E(v_1), \ldots, \pi_E(v_n)$ sont projectivement indépendants si et seulement si les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.

Une homographie transforme des points projectivement indépendants en des points projectivement indépendants.

Théorème. *Soient $p_1, \ldots, p_{n+2}$ points d'un espace projectif $\mathbf{P}(E)$ de dimension n. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute sous-famille de $n+1$ points parmi $p_1, \dots, p_{n+2}$ est projectivement indépendantes (il y a $n+2$ telles sous-familles).*
2. *Il existe une base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de E telle que $\pi_E(e_1) = p_1, \dots, \pi_E(e_{n+1}) = p_{n+1}$ et $\pi_E(e_1 + \dots + e_{n+1}) = p_{n+2}$.*

On dit alors que $(p_1, \dots, p_{n+2})$ est un repère projectif de $\mathbf{P}(E)$. De plus, si $(f_1, \dots, f_n)$ est une autre base de E vérifiant la condition 2, alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $f_i = \lambda e_i$.

Dans une droite projective, un repère projectif est formé de trois points, deux à deux distincts. Dans un plan projectif, un repère projectif est formé de quatre points, trois à trois non alignés.

Démonstration. Pour voir que 2. implique 1, il suffit d'observer que pour tout i, les vecteurs $e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n, e_1 + \dots + e_n$ forment une base de E.

Supposons 1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, choisissons e'_i tel que $p_i = \pi_E(e'_i)$. Puisque $(p_1, \dots, p_{n+1})$ sont projectivement indépendants, la famille $(e'_1, \dots, e'_{n+1})$ est une base de E. Soit $v \in E$ tel que $\pi_E(v) = e_{n+2}$. On peut décomposer v comme $v = \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_n e'_n$. Pour tout i, les vecteurs $e'_1, \dots, e'_{i-1}, v, e'_{i+1}, \dots, e'_{n+1}$ sont linéairement indépendants par hypothèse, et donc $\lambda_i \neq 0$. On peut donc poser $e_i = \lambda_i^{-1} e'_i$.

Si $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est une autre base vérifiant la condition 2, alors il existe $\mu_i \in \mathbf{K}^*$ tels que $f_i = \mu_i e_i$. Puisque $\pi_E(f_1 + \dots + f_n) = \pi_E(e_1 + \dots + e_n)$, il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\sum f_i = \lambda \sum e_i$. On a donc $\sum \mu_i e_i = \sum \lambda e_i$ et donc $\mu_i = \lambda$ pour tout i. $\square$

Fin cours #5 du 13 mars

Théorème. *Soient $\mathbf{P}(E)$, $\mathbf{P}(F)$ des espaces projectifs de dimension n. Soient $(p_1, \dots, p_{n+2})$ un repère projectif de $\mathbf{P}(E)$ et $(q_1, \dots, q_{n+2})$ un repère projectif de $\mathbf{P}(F)$. Il existe une unique homographie $h : \mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}(F)$ vérifiant $h(p_i) = q_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+2$.*

Démonstration. Choisissons des bases $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de E et $(f_1, \dots, f_{n+1})$ de F comme dans le théorème précédent. Si $u : E \to F$ est l'application linéaire donnée par $u(e_i) = f_i$, alors l'homographie $h = \mathbf{P}(u)$ convient.

Soit $\mathbf{P}(v)$ est une autre homographie qui convient. On a $\pi_F(v(e_i)) = q_i$ et $\pi_F(v(e_1 + \dots + e_{n+1}) = q_{n+2}$. Par le théorème précédent, il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $v(e_i) = \lambda f_i$. On a donc $v = \lambda u$ et $\mathbf{P}(v) = h$. $\square$

Dans un plan projectif, un repère est formé de quatre points. Le théorème précédent peut être appliqué pour faire du redressement d'image. C'est ce que fait votre smartphone quand vous scannez un QR code de biais : il détecte les sommets de l'image (qui peut être un quadrilatère arbitraire) et applique l'homographie qui les envoie sur les sommets d'un carré.

Soit $\mathcal{R} = (p_1, \dots, p_{n+2})$ un repère projectif d'un espace projectif $\mathbf{P}(E)$ de dimension n. Il existe une unique homographie $h : \mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$h(p_1) = (1 : 0 : \dots : 0)$$

$$h(p_2) = (0 : 1 : \dots : 0)$$

$$\vdots$$

$$h(p_{n+1}) = (0 : 0 : \dots : 1)$$

$$h(p_{n+2}) = (1 : 1 : \dots : 1)$$

Soit $p \in \mathbf{P}(E)$ tel que $h(p) = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$. On dit que $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ est un système de coordonnées homogènes de p dans le repère $\mathcal{R}$.

Le repère canonique de $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ est formé des points

$$(1 : 0 : \cdots : 0), (0 : 1 : \cdots : 0), \ldots, (0 : 0 : \ldots : 1), (1 : 1 : \ldots : 1)$$

Exprimé en termes d'abscisses projectives, le repère canonique de $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ est $(\infty, 0, 1)$.

2.5 Liaison affine-projectif

Commençons par traiter la complétion projective de l'espace affine $\mathbf{K}^n$. Notons H_∞ l'hyperplan projectif d'équation $x_{n+1} = 0$ dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$. L'application $\iota : \mathbf{K}^n \to \mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ donnée par

$$\iota(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 : \ldots : x_n : 1)$$

est une bijection de $\mathbf{K}^n$ sur $\mathbf{P}_n(\mathbf{K}) \setminus H_\infty$. La bijection réciproque envoie $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ (avec $x_{n+1} \neq 0$) sur $(x_1/x_{n+1}, \ldots, x_n/x_{n+1})$. On ainsi voir $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ comme la réunion de (l'image par ι de) $\mathbf{K}^n$ et de l'hyperplan H_∞, ce qui généralise l'identification de $\mathbf{P}_1(\mathbf{K})$ à $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$. On dit que $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ est le complété projectif de l'espace affine $\mathbf{K}^n$. On identifie $\mathbf{K}^n$ à son image $\iota(\mathbf{K}^n) = \mathbf{P}_n(\mathbf{K}) \setminus H_\infty$.

Soit A un sous-espace affine de $\mathbf{K}^n$. De la même manière, on appelle complété projectif de A le sous-espace projectif $\hat{A} = \mathbf{P}(\mathrm{vect}(A \times \{1\})$ de $\mathbf{P}_n(\mathbf{K})$. On peut vérifier que $\hat{A} = \iota(A) \cup (\hat{A} \cap H_\infty)$.

Soit G le sous-groupe de $PGL_n(\mathbf{K})$ formé des homographies $h : \mathbf{P}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{P}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $h(H_\infty) = H_\infty$.

Théorème. *L'application $h \mapsto h_{|\mathbf{K}^n}$ est un isomorphisme de groupe de G sur $GA(\mathbf{K}^n)$.*

Démonstration. Soit $M \in GL_{n+1}(\mathbf{K})$ identifiée à une application linéaire $\mathbf{K}^{n+1} \to \mathbf{K}^{n+1}$. L'homographie associée $h = \mathbf{P}(M)$ est dans G si et seulement si la dernière ligne de M est de la forme $(0, \ldots, 0, \lambda)$ avec $\lambda \neq 0$. Quitte à remplacer M par $\lambda^{-1}M$ (qui représente la même homographie, on peut suppose $\lambda = 1$.

Le morphisme canonique $GL_{n+1}(\mathbf{K}) \to PGL_{n+1}(\mathbf{K})$ induit un isomorphisme entre le sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in GL_n(\mathbf{K}), b \in \mathbf{K}^n$$

et le sous-groupe G. Pour conclure, on remarque que

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

et que le groupe affine de $\mathbf{K}^n$ est le groupe des transformations $x \mapsto Ax + b$ avec $A \in GL_n(\mathbf{K})$ et $b \in \mathbf{K}^n$. □

Réciproquement, étant donné un espace projectif $\mathbf{P}(E)$ et un hyperplan projectif $H = \mathbf{P}(F)$ de cet espace, on peut munir $\mathbf{P}(E) \setminus H$ d'une structure d'espace affine. On choisit une forme linéaire non nulle $\phi : E \to \mathbf{K}$ telle que $F = \ker \phi$. On considère le sous-espace affine de E donné par $A = \{x \ : \ \phi(x) = 1\}$. L'application $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(E)$ induit une bijection de A sur $\mathbf{P}(E) \setminus H$; par «transport de structure», cette bijection munit $\mathbf{P}(E) \setminus H$ d'une structure d'espace affine. Cette structure est donnée par l'action

$$F \times (\mathbf{P}(E) \setminus H) \to \mathbf{P}(E) \setminus H$$

qui à (x, M) associe $\pi(x + y)$ où y est l'unique élément de A tel que $\pi(y) = M$.

Exercice. Montrer que cette structure d'espace affine ne dépend pas du choix de ϕ.

2.6 Dualité

Pour simplifier, on se place dans le cadre d'un plan projectif $\mathbf{P}(E)$ (donc E est un espace vectoriel de dimension 3). On note E^* le dual de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$F^\perp = \{\phi \in E^* \ : \ \phi_{|F} = 0\}$$

est un sous-espace de E^* qui vérifie $\dim(F) + \dim(F^\perp) = 3$. L'application $F \mapsto F^\perp$ est une bijection (1) entre les droites vectorielles de E et les plans vectoriels de E^*, et aussi (2) entre les plans vectoriels de E et les droites vectorielles de E^*.

Au niveau des espaces projectifs, cette application envoie les points de $\mathbf{P}(E)$ sur les droites de $\mathbf{P}(E^*)$, et réciproquement. A l'aide de la remarque que $F_1 \subset F_2$ si et seulement si $F_1^\perp \supset F_2^\perp$, on remarque que

1. Soit P un point de $\mathbf{P}(E)$ et d une droite de $\mathbf{P}(E^*)$. On note $p = P^\perp \in \mathbf{P}(E^*)$ la droite duale de P et $D = d^\perp \in \mathbf{P}(E^*)$ le point dual de d. Alors $p \in D \iff d \in P$.
2. Soient A, B, C trois point de $\mathbf{P}(E)$ et a, b, c les droites duales dans $\mathbf{P}(E^*)$. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les droites a, b, C sont concourantes.

Comme en géométrie affine, on notera (AB) la droite projective passant par deux points $A \neq B$ d'un plan projectif.

Rappelons l'énoncé du théorème de Pappus affine :

Théorème (Théorème de Pappus affine)**.** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{D}$ et A', B', C', trois points distincts de $\mathcal{D}'$. On suppose qu'aucun de ces points n'est commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si $(AB') \mathbin{/\mkern-6mu/} (A'B)$ et $(BC') \mathbin{/\mkern-6mu/} (B'C)$ alors $(AC') \mathbin{/\mkern-6mu/} (A'C)$.*

On va en déduire une variante projective.

Théorème (Théorème de Pappus projectif)**.** *Dans un plan projectif $\mathcal{P}$, soient A, B, C et A', B', C' deux triplets de points alignés, deux à deux distincts, non tous alignés. Soit $A'' = (BC') \cap (B'C)$, $B'' = (AC') \cap (A'C)$ et $C'' = (AB') \cap (A'B)$. Alors les points A'', B'' et C'' sont alignés.*

L'écriture «$A'' = (BC') \cap (B'C)$» est abusive, il faudrait plus exactement écrire « $\{A''\} = (BC') \cap (B'C)$».

Démonstration. Soit d la droite $(A''C'')$. On «envoie d à l'infini», c'est-à-dire qu'on munit $\mathcal{P} \setminus d$ de sa structure d'espace affine. Dans cet espace affine, on a $(BC') \mathbin{/\mkern-6mu/} (B'C)$ et $(AB') \mathbin{/\mkern-6mu/} (A'B)$. Par le théorème de Pappus affine, on en déduit que $(AC') \mathbin{/\mkern-6mu/} (A'C)$, c'est-à-dire que $B'' \in \Delta$, d'où le résultat. □

On peut alors dualiser l'énoncé.

Théorème (Théorème de Pappus projectif dual)**.** *Dans un plan projectif, soient a, b, c et a', b', c' deux triplets de droites concourantes, deux à deux distinctes, non toutes concourantes. On note a'' la droite passant par $b \cap c'$ et $b' \cap c$; on note b'' la droite passant par $a \cap c'$ et $a' \cap c$ et on note c'' la droite passant par $a \cap b'$ et $a' \cap b$. Alors a'', b'' et c'' sont concourantes.*

On peut en déduire des corollaires purement affines. Voici ce qu'on obtient en envoyant les deux points d'intersection des triplets à l'infini : dans un plan affine, soit d_1, d_2, d_3 et d_1', d_2', d_3' deux triplets de droites parallèles, non toutes parallèles. On suppose les droites deux à deux distinctes. On note $A_{ij} = d_i \cap d'_j$. Alors les droites $(A_{12}A_{21})$, $(A_{13}A_{31})$ et $(A_{23}A_{32})$ sont concourantes.

Fin cours # 6 du 27 mars

Rappelons également le théorème de Desargues affine

Théorème (Théorème de Desargues affine)**.** *Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un espace affine tels que A, B, C et A', B', C' soient affinement indépendants. Alors*

(i) $(AB) \mathbin{/\!/} (A'B')$, $(BC) \mathbin{/\!/} (B'C')$ et $(AC) \mathbin{/\!/} (A'C')$

implique

(ii) les trois droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont soit concourantes, soit parallèles.

et déduisons-en sa version projective

Théorème (Théorème de Desargues projectif)**.** *Soient A, B, C, A', B', C' six points distincts d'un plan projectif tels que les droites $a = (BC)$, $b = (AC)$, $c = (AB)$ et $a' = (B'C')$, $b' = (A'C')$, $c' = (A'B')$ soient distinctes. On considère les points $P = a \cap a'$, $Q = b \cap b'$ et $R = c \cap c'$ et les droites $p = (AA')$, $q = (BB')$ et $r = (RR')$. Il y équivalence entre*

1. *les droites p, q et r sont concourantes,*
2. *les points P, Q et R sont alignés.*

Démonstration. Montrons que (2) implique (1) en envoyant la droite $(PQ) = (PR)$ à l'infini. Les six points sont dans le plan affine $\mathcal{E} = \mathbf{P}(E) \setminus (PQ)$, et on a $(AB) \mathbin{/\!/} (A'B'), (BC) \mathbin{/\!/} (B'C')$, $(AC) \mathbin{/\!/} (A'C')$. Le théorème de Desargues affine implique que les droites p, q et r sont concourantes ou parallèles dans $\mathcal{E}$, donc concourantes dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$.

Enfin, il suffit de remarquer que l'énoncé dual de l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) est exactement l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) ! La dualité échange A et a, B et b, etc.. , «points alignés» et «droites concourantes», «$a = (BC)$» et «$A = b \cap c$». □

On obtient alors un renforcement de l'énoncé affine : on a l'équivalence (i) $\iff$ (ii) dans l'énoncé affine !

2.7 Birapport

On a vu que les transformations affines préservent les rapports : si A, B, C sont trois points alignés d'images A', B', C' par une transformation affine, alors ... De la même manière, nous allons voir que les transformations projectives préservent les birapports de 4 points.

On identifie $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ à $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$ via l'abscisse projective.

Soit D une droite projective et x, y, z, w quatre points distincts de D. Il existe une unique homographie $\phi : D \to \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ telle que $\phi(x) = \infty$, $\phi(y) = 0$ et $\phi(z) = 1$. On appelle birapport du quadruplet (x, y, z, w) et on note $[x, y, z, w]$ l'élément $\phi(w)$ de $\mathbf{K} \cup \{\infty\}$. En réalité, le birapport n'est jamais égal à 0, 1 ou ∞.

Proposition. *Si x, y, z, w sont quatre points distincts de la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$, leur birapport est donné par*

$$[x, y, z, w] = \frac{\dfrac{w-y}{w-x}}{\dfrac{z-y}{z-x}}$$

C'est un élément de $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'homographie

$$\alpha \mapsto \frac{\dfrac{\alpha - y}{\alpha - x}}{\dfrac{z - y}{z - x}}$$

est l'unique ϕ de la définition précédente. □

Les birapports sont conservés par les homographies.

Proposition. *Soient D et D' des droites projectives et $f : D \to D'$ une bijection. Alors il y a équivalence entre*

1. *f est une homographie,*
2. *f préserve le birapport, c'est-à-dire que si x, y, z, w sont des points distincts de D, alors*
$$[f(x), f(y), f(z), f(w)] = [x, y, z, w].$$

Démonstration. Supposons que f est une homographie. Il suffit de remarquer que si $\phi : D' \to \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ est l'homographie qui envoie $(f(x), f(y), f(z))$ sur $(\infty, 0, 1)$, alors $\phi \circ f : D \to \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ est l'homographie que envoie (x, y, z) sur $(\infty, 0, 1)$.

Réciproquement, supposons que f préserve le birapport. Il existe une homographie $g : D \to D'$ qui envoie (x, y, z) sur $(f(x), f(y), f(z))$. Montrons que $f = g$: pour tout w dans D, on a

$$[f(x), f(y), f(z), f(w)] = [x, y, z, w] = [g(x), g(y), g(z), g(w)]$$

et l'égalité $f(w) = g(w)$ découle du fait que la fonction $\alpha \mapsto [x, y, z, \alpha]$ est une bijection de $D \setminus \{x, y, z\}$ dans $\mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$. □

Chapitre 3

Géométrie affine euclidienne

3.1 Espaces affines euclidiens

Dans ce chapitre, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. On pose alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. On appelle espace affine euclidien un espace affine $\mathcal{E}$ dont la direction E est un espace euclidien.

On peut alors munir $\mathcal{E}$ d'une distance en posant pour A, B dans $\mathcal{E}$

$$d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Dans tout ce chapitre, on fixe un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de direction E. On peut alors donner une caractérisation métrique de certains concepts de géométrie affine.

Proposition. *Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$. Alors*

1. *le segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $AB = AM + BM$.*
2. *un point $I \in \mathcal{E}$ est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $AI = BI = \frac{1}{2}AB$.*

Démonstration. C'est le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne. Soit $M \in \mathcal{E}$. On écrit $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$ pour $\lambda \in \mathbf{E}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. On a alors $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$. Par le théorème de Pythagore, il vient

$$AM^2 = \lambda^2 AB^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2$$

$$BM^2 = (1 - \lambda)^2 AB^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2$$

On a donc $AM \geqslant |\lambda|AB$ et $BM \geqslant |1 - \lambda|AB$ (avec à chaque fois égalité si et seulement si $\overrightarrow{u} = 0$) et donc $AM + BM \geqslant (|\lambda| + |1 - \lambda|)AB$. Il y a égalité si et seulement si $\overrightarrow{u} = 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, donc si et seulement si $M \in [AB]$. □

On appelle sphère de centre $A \in \mathcal{E}$ et de rayon $r \geqslant 0$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $AM = r$. Dans un plan affine euclidien, on parlera plutôt de cercle.

Théorème (Théorème de l'angle droit)**.** *Soient A, B deux points de $\mathcal{E}$. L'ensemble*

$$\{M \in \mathcal{E} \ : \ \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}\}$$

est la sphère de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $IA = IB = \frac{IM}{2}$.

Démonstration. Pour tout M dans $\mathcal{E}$, on a

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \iff \langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\rangle = 0$$

Comme $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, cette condition devient $MI^2 = IA^2$, d'où le résultat. □

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espace affines de $\mathcal{E}$, de directions respectives F et G. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux si on a $u \perp v$ pour tout $u \in F$ et $v \in G$.

Vérifiez que vous savez définir le vocabulaire de géométrie élémentaire : triangle rectangle, isocèle, équilatéral, rectangle, losange, carré.

Proposition. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines orthogonaux. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit vide, soit un singleton.*

Démonstration. Soient A et B dans $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\overrightarrow{AB} \in F \cap G$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, d'où le résultat. □

Proposition. *Soient $A \neq B$ deux points de $\mathcal{E}$. L'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ tels que $AM = BM$ est un hyperplan affine appelé hyperplan médiateur de $[AB]$. C'est l'hyperplan de direction $\overrightarrow{AB}^{\perp}$ passant par le milieu de $[AB]$*

Démonstration. Soit I le milieu de $[AB]$; on a $I \neq A$. Soit $M \in \mathcal{E}$. Écrivons $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. On a alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = (\lambda + \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} = (\lambda - \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u}$, et on a $AM = BM$ ssi $\lambda = 0$. □

Fin cours # 7 du 3 avril

3.2 Orientation

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. On dit que $\mathcal{B}_1$ est de même sens que $\mathcal{B}_2$ si la matrice de passage $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ a déterminant > 0, et de sens contraire sinon. La relation «être de même sens que» est une relation d'équivalence. On appelle orientation de E une classe d'équivalence pour cette relation, il y a donc deux orientations possibles. On dit que E est un espace vectoriel orienté si on a choisi une des deux orientations. Dans un espace orienté, on dit qu'une base est directe si elle est dans la classe d'équivalence choisie.

Attention : un sous-espace d'un espace vectoriel orienté n'est pas orienté.

3.3 Isométries

Une application d'un espace métrique (X, d) dans lui-même est une isométrie si c'est une bijection qui préserve la distance. L'ensemble $Isom(X)$ des isométries forme toujours un groupe pour la composition (c'est un sous-groupe de l'ensemble des permutations de X)

Proposition. *Toute isométrie d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est affine. le groupe $Isom(\mathcal{E})$ est donc un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$*

Démonstration. NB L'argument donné en cours était incomplet La preuve utilise une caractérisation métrique du barycentre.

Lemme. *Soient A, B deux points de $\mathcal{E}$ et p, q des réels vérifiant $p+q = 1$. Un point $G \in \mathcal{E}$ est le barycentre $\begin{pmatrix} A & B \\ p & q \end{pmatrix}$ si et seulement si on a l'égalité*

$$p \cdot OA^2 + q \cdot OB^2 = OG^2 + p \cdot GA^2 + q \cdot GB^2$$

pour tout $O \in \mathcal{E}$.

Démonstration. Pour tous points O et G de $\mathcal{E}$, on a $OA^2 = OG^2 + GA^2 + 2\langle\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{GA}\rangle$ et $OB^2 = OG^2 + GB^2 + 2\langle\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{GB}\rangle$, donc

$$p \cdot OA^2 + q \cdot OB^2 = OG^2 + p \cdot GA^2 + q \cdot GB^2 + 2\langle\overrightarrow{OG}, p\overrightarrow{GA} + q\overrightarrow{GB}\rangle$$

La condition du lemme est donc vérifiée si et seulement si on a $\overrightarrow{OG} \perp p\overrightarrow{GA} + q\overrightarrow{GB}$ pour tout $O \in \mathcal{E}$, donc si et seulement si $p\overrightarrow{GA} + q\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, ce qui revient à dire que G est le barycentre recherché. □

Considérons une isométrie de $\mathcal{E}$ notée $\phi : M \mapsto M'$. Considérons un barycentre $G = \begin{pmatrix} A & B \\ p & q \end{pmatrix}$. Par le lemme, on a donc $p \cdot OA^2 + q \cdot OB^2 = OG^2 + p \cdot GA^2 + q \cdot GB^2$ pour tout $O \in \mathcal{E}$, et donc $p \cdot O'A'^2 + q \cdot O'B'^2 = O'G'^2 + p \cdot G'A'^2 + q \cdot G'B'^2$. Comme O' parcourt $\mathcal{E}$ (ϕ est surjective), le lemme implique que $G' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ p & q \end{pmatrix}$. Par associativité des barycentres, l'application ϕ préserve les barycentres et est donc affine. □

On note $O(E)$ le groupe des transformations orthogonales de E, c'est-à-dire des endomorphismes u de E vérifiant $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, ou encore ${}^t u \cdot u = \mathrm{Id}_E$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on définit la symétrie $s_F : E \to E$ comme étant l'application linéaire qui vaut Id_F sur F et $-\mathrm{Id}_G$ sur $G = F^\perp$. C'est une isométrie vectorielle.

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, on définit la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$, notée $\sigma_\mathcal{F}$, de la manière suivante : on fixe $O \in \mathcal{F}$ et on pose $M' = \sigma_\mathcal{F}(M)$ avec $\overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM})$.

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $F^\perp$ son supplémentaire orthogonal. On note $\overrightarrow{p}_F$ la projection orthogonal sur F ; c'est la projection de noyau $F^\perp$ et d'image F.

Dans le cas de symétrie (vectorielle ou affine) par rapport à un hyperplan (vectoriel ou affine), on parlera plutôt de réflexion.

Théorème. *Dans un espace vectoriel euclidien de dimension n, toute isométrie s'écrit comme composée de p réflexions pour $p \leqslant n$.*

Dans un espace affine euclidien de dimension n, toute isométrie affine s'écrit comme composée de p réflexions pour $p \leqslant n+1$.

Démonstration. On suppose connu le cas vectoriel (cf cours de L2, par récurrence sur la dimension).

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie affine. S'il existe un point fixe O, alors on vectorialise en O pour montrer que f est la composition de $\leqslant n$ réflexions par rapport à des hyperplans passant par O.

Sinon, soit $A \in \mathcal{E}$ et $A' = f(A) \neq A$ son image. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan médiateur de $[AA']$. Alors $\sigma_\mathcal{H}(A') = A$ et donc A est un point fixe de $\sigma_\mathcal{H} \circ f$. Ainsi $\sigma_\mathcal{H} \circ f$ est produit de $\leqslant n$ réflexions, donc $f = \sigma_\mathcal{H} \circ \sigma_\mathcal{H} \circ f$ est produit de $\leqslant n+1$ réflexions. □

On note $O(n)$ le groupe des isométries de l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^n$. Il s'identifie à l'ensemble des matrices A vérifiant ${}^t A \cdot A = \mathrm{Id}$. Le déterminant d'une matrice $A \in O(n)$ vaut ± 1. On note $SO(n)$ le sous-groupe formé des matrices de déterminant 1.

Les éléments de $SO(2)$ sont les rotations

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Remarquons que $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$. L'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme de groupe de $\mathbf{R}$ sur $SO(2)$. Elle induit donc un isomorphisme entre $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et $SO(2)$. Les éléments de $O(2) \setminus SO(2)$ sont les réflexions.

Si E est un plan euclidien et si $f \in SO(E)$, alors

$$g \circ f \circ g^{-1} = \begin{cases} f \text{ si } g \in SO(E) \\ f^{-1} \text{ si } g \in O(E) \setminus SO(E) \end{cases} \tag{3.1}$$

La première formule découle du fait que $SO(E)$ est commutatif ; la seconde formule découle du fait que $g^2 = (gf)^2 = \mathrm{Id}_E$ (tout élément de $O(E) \setminus SO(E)$ est d'ordre 2).

On en déduit que dans un plan euclidien orienté, les éléments de $SO(E)$ ont la même matrice dans toutes les bases orthonormales directes. Un choix d'orientation détermine une isomorphisme entre $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et $SO(E)$

3.4 Angles

Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. Alors $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$ (Cauchy–Schwartz) et il existe donc un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\langle u, v\rangle = \cos(\theta)\|u\|\|v\|$. On l'appelle *angle géométrique* entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Il est un peu plus délicat de définir l'angle non orienté entre deux vecteurs : il n'est possible de le faire qu'en dimension deux, dans un plan orienté.

Lemme. *Soient u et v deux vecteurs d'un plan euclidien tels que $\|u\| = \|u'\| = 1$. Il existe un unique $R \in SO(E)$ tel que $R(u) = u'$.*

Démonstration. On considère une base orthonormée (u, v). Dans cette base, u' s'écrit $au+bv$ pour a, b réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. La seule rotation qui convient est celle de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base (u, v). □

Soit E un plan euclidien orienté. Soit E un plan euclidien orienté ; on a vu qu'on peut identifier $SO(E)$ à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. On note donc aussi $R(\theta)$ l'élément de $SO(E)$ dont la matrice est $R(\theta)$ dans toute base orthonormée directe.

Soient u, v deux vecteurs non nuls. On appelle *angle orienté* entre les vecteurs u et v, et on note $\widehat{u, v}$, l'unique élément $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ tel que $\frac{v}{\|v\|} = R(\theta)\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$.

Proposition. *Soient u, v, w des vecteurs non nuls d'un plan orienté. Alors*

1. $\widehat{u, u} = 0$
2. $\widehat{u, -u} = \pi$ *(on dit que c'est un angle plat)*
3. $\widehat{u, v} = -\ \widehat{v, u}$
4. $\widehat{u, v} + \widehat{v, w} = \widehat{u, w}$
5. *Si $f \in SO(E)$, alors $\widehat{f(u), f(v)} = \widehat{u, v}$.*
6. *Si $f \in O(E) \setminus SO(E)$, alors $\widehat{f(u), f(v)} = \widehat{v, u}$.*

Toutes ces formules sont des égalités dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Démonstration. Les premiers point découlent du fait que $R(0) = \mathrm{Id}$, $R(\pi) = -\mathrm{Id}$ et $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$. La règle de Chasles découle de l'associativité de la composition, le quatrième point du fait que les rotations commutent. Les deux derniers points découlent des formules (3.1). □

Quand on identifie $\mathbf{R}^2$ (avec son orientation canonique : la base (e_1, e_2) est directe) à $\mathbf{C}$, l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls u et v est un argument du complexe v/u.

Dans la fin du chapitre, on se place dans un plan euclidien orienté. Mais la plupart des énoncés sont en réalité vrais pour les deux orientations possibles !

Proposition. *Si A, B, C sont trois points distincts d'un plan affine euclidien orienté, alors*

$$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} + \widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}} + \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}} = \pi$$

Démonstration. On an $\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}} = \widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}}$. Par la relation de Chasles, la somme vaut $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}} = \pi$. □

Théorème (Théorème de l'angle inscrit)**.** *Si A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O, alors*

$$\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}$$

Démonstration. Comme la réflexion par rapport à la médiatrice de $[AC]$ a O comme point fixe, et comme elle inverse les angles, on a

$$\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}} = -\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}} = \widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}}.$$

On a donc

$$\pi = \widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}} + \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}} + \widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}} = \widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}} + 2\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}}$$

En échangeant le rôle de A et B, on a

$$\pi = \widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}} + 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}}$$

et donc en retranchant ces égalités

$$0 = \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} + 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}$$

d'où le résultat. □

Cet énoncé a aussi une variante avec un vecteur tangent, dont la preuve est laissée en exercice.

Théorème. *Soient A et B deux points distincts d'un cercle de centre* 0*, et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de la tangente au cercle en B. Alors*

$$\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v}}$$

Si A, B, C sont trois points non alignés, ils déterminent un unique cercle (le cercle circonscrit au triangle ABC, qui est l'intersection des médiatrices).

Corollaire (Cocyclicité)**.** *Soient A, B et C trois points non alignés. Un point D est sur le cercle qu'ils déterminent si et seulement si*

$$2 \cdot \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}$$

Démonstration. (non donnée en cours) Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et supposons que D est sur ce cercle. Alors en appliquant deux fois le théorème de l'angle inscrit.

$$\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}$$

Réciproquement, supposons l'égalité d'angles vérifiée. Soit O le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ à ABC et O' le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}'$ à ABD. Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ des vecteurs directeurs des droites tangentes à ces deux cercles en B. Par les deux théorèmes précédents, on a

$$2 \cdot \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v}} = \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}$$

$$2 \cdot \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v'}} = \widehat{\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}$$

On en déduit que $2 \cdot \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v}} = 2 \cdot \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v}'}$ et donc $\overrightarrow{v} = \pm \overrightarrow{v}'$ et les tangentes aux deux cercles sont confondue. Il existe un unique cercle passant par A, B et de tangente donnée en B (exercice). On a donc $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$. □

Fin du cours