

Examen final du 6 mai 2026

Durée : 90 minutes

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

La notation prendra en compte la qualité et la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Définition à compléter

Soit A une partie d'un espace affine réel \mathcal{E} (donnez le cadre le plus général dans lequel la définition a un sens)
On définit l'enveloppe convexe de A comme l'intersection de la famille des parties convexes de \mathcal{E} contenant A .

Exercice 2. Barycentres et isométries

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien.

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et A, B, G des points de \mathcal{E} . Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes

(a) Le point G est le barycentre $\begin{pmatrix} A & B \\ \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}$.

(b) Pour tout point O de \mathcal{E} , on a

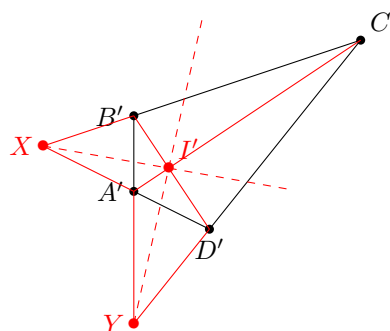
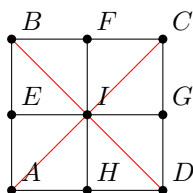
$$\lambda \cdot OA^2 + (1 - \lambda) \cdot OB^2 = OG^2 + \lambda \cdot GA^2 + (1 - \lambda) \cdot GB^2$$

2. Soit $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une isométrie (c'est à dire une bijection qui préserve les distances). En utilisant la question précédente, montrer que ϕ est affine.

Cf notes de cours, page 24-25

Exercice 3. Figure à compléter

On considère les figures suivantes (la figure de gauche est un quadrillage régulier).



- Énoncer un théorème du cours permettant d'affirmer qu'il existe une unique homographie ϕ du plan projectif réel envoyant A, B, C, D sur A', B', C', D' . Si (p_1, \dots, p_{n+2}) et (q_1, \dots, q_{n+2}) sont deux repères projectifs d'un espace projectif $\mathbf{P}(E)$ de dimension n (autrement dit, associé à un espace vectoriel E de dimension n), il existe une unique homographie $h : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ qui vérifie $h(p_i) = q_i$
- Compléter la figure de droite pour y inclure les images par ϕ des points E, F, G, H, I (on les notera E', F', G', H', I'). Justifiez votre démarche. On détermine d'abord I' comme intersection des droites $(B'D')$ et $(A'C')$. Puisque les droites $(BC), (EG)$ et (AD) sont parallèles dans le plan affine (donc concourantes à l'infini dans le plan projectif), leurs images par l'homographie sont concourantes en un point $X = (A'D') \cap (B'C')$. On a $E' = (XI') \cap (A'B')$ et $G' = (XI') \cap (C'D')$. De même, si $Y = (A'B') \cap (C'D')$, on a $H' = (A'D') \cap (YI')$ et $F' = (B'C') \cap (YI')$.

Exercice 4. Homographies de la droite projective

Soit \mathbf{K} un corps et ϕ une homographie de $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ différente de l'identité.

Montrer qu'il y a équivalence entre

- ϕ est une involution (c'est à dire que $\phi \circ \phi = \text{id}$),
- ϕ est de trace nulle (c'est à dire que si $\phi = \mathbf{P}(f)$ pour $f \in GL_2(\mathbf{K})$, alors $\text{tr}(f) = 0$),
- il existe un point $p \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ tel que $\phi(p) \neq p$ et $\phi(\phi(p)) = p$.

Solution.

- 1 \implies 3 Comme $\phi \neq \text{id}$, il existe $p \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ tel que $\phi(p) \neq p$ et on a $\phi(\phi(p)) = p$ puisque ϕ est une involution
- 3 \implies 2 Soit $f \in GL_2(\mathbf{K})$ tel que $\phi = \mathbf{P}(f)$. Soit $x \in \mathbf{K}^2$ tel que $p = \mathbf{K}x$. Puisque $\phi(p) \neq p$, la famille $(x, f(x))$ est une base de \mathbf{K}^2 . De plus, puisque $\phi(\phi(p)) = p$, on a $f(f(x)) \in \mathbf{K}^*x$. La matrice de l'application linéaire canoniquement associée à f dans la base $(x, f(x))$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$, ce qui montre que $\text{tr}(f) = 0$.
- 2 \implies 1 Soit $\phi = \mathbf{P}(f)$ pour $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbf{K}$. On calcule $f^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$ et donc $\phi^2 = \text{id}$.

Exercice 5. Projections affines

Soient \mathcal{E} un espace affine réel de direction E et \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction F . Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$.

1. Montrer que pour tout point M de \mathcal{E} , l'ensemble $\mathcal{F} \cap (M + G)$ est un singleton. On note $p_{\mathcal{F},G}(M)$ son unique élément. Montrer que $p_{\mathcal{F},G}(M)$ est l'unique point $M' \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in G$.
2. Montrer que l'application $p_{\mathcal{F},G}$ est affine et déterminer sa partie linéaire $\overrightarrow{p_{\mathcal{F},G}}$. L'application affine $p_{\mathcal{F},G}$ est appelée la *projection affine* sur \mathcal{F} parallèlement à G .
3. Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants
 - (a) On a $f \circ f = f$.
 - (b) On a $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$ et il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = M$.
 - (c) L'application f est une projection affine (c'est-à-dire : il existe un s.e.a. \mathcal{F} de \mathcal{E} de direction F et un s.e.v. G de E vérifiant $E = F \oplus G$, tels que l'on ait $f = p_{\mathcal{F},G}$).

Solution.

1. Soit $O \in \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} = O + F$. On écrit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ pour $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$. Alors le point $A := O + \overrightarrow{u}$ est dans $O + F$ (car $\overrightarrow{u} \in F$) et dans $M + G$ (car $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{v} \in G$). Si B est un point de $\mathcal{F} \cap (M + G)$, alors $\overrightarrow{AB} \in F$ et $\overrightarrow{AB} \in G$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ et $A = B$.
2. Pour tous A, B dans \mathcal{E} , si $A' = p_{\mathcal{F},G}(A)$ et $B' = p_{\mathcal{F},G}(B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AA'}}_{\in G} + \underbrace{\overrightarrow{B'B}}_{\in F} + \overrightarrow{A'B'}$$

et donc $\overrightarrow{A'B'} = \pi_{F,G}(\overrightarrow{AB})$. Ceci montre que $p_{\mathcal{F},G}$ est affine de partie linéaire la projection d'image F et de noyau G , que l'on note $\pi_{F,G}$.

3. On a

- (a) \implies (b) La première relation découle du fait que $\overrightarrow{f \circ f} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f}$; n'importe quel M dans l'image de f convient.
- (c) \implies (a) Il suffit de vérifier que $p_{\mathcal{F},G}^2 = p_{\mathcal{F},G}$, ce qui est immédiat (si $A \in \mathcal{F}$, on a bien $A \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{AA} \in G$)
- (b) \implies (c) On a $\overrightarrow{f} = \pi_{F,G}$ pour $F = \text{Im}(\overrightarrow{f})$ et $G = \text{ker}(\overrightarrow{f})$. Soit $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = M$; montrons que $f = p_{M+F,G}$. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{f(A)M} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \in F$ donc $f(A) \in M + F$.

On calcule

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{Af(A)}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{Mf(A)}) = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{Mf(A)}) = \overrightarrow{f(f(A))M} + \overrightarrow{Mf(f(A))} = \overrightarrow{0}$$

et donc $\overrightarrow{Af(A)} \in \text{ker}(\overrightarrow{f}) = G$. D'après la question 1, on a bien $f = p_{M+F,G}$.