Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2025-2026

L3 – UE de Géométrie

Examen final du 6 mai 2026

Durée : 90 minutes

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

La notation prendra en compte la qualité et la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Définition à compléter

Soit A une partie d'un espace .... (donnez le cadre le plus général dans lequel la définition a un sens)
On définit l'enveloppe convexe de A comme ....

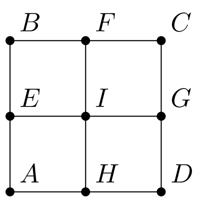
Exercice 2. Barycentres et isométries

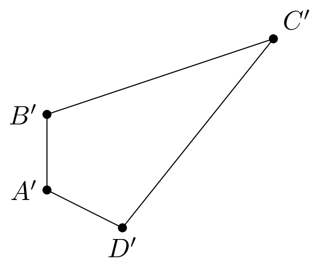
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien.

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et A, B, G des points de $\mathcal{E}$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes
   (a) Le point G est le barycentre $\begin{pmatrix} A & B \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$.
   (b) Pour tout point O de $\mathcal{E}$, on a
   $$\lambda \cdot OA^2 + (1-\lambda) \cdot OB^2 = OG^2 + \lambda \cdot GA^2 + (1-\lambda) \cdot GB^2$$
2. Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie (c'est à dire une bijection qui préserve les distances). En utilisant la question précédente, montrer que ϕ est affine.

Exercice 3. Figure à compléter

On considère les figures suivantes (la figure de gauche est un quadrillage régulier).





1. Énoncer un théorème du cours permettant d'affirmer qu'il existe une unique homographie ϕ du plan projectif réel envoyant A, B, C, D sur A', B', C', D'.
2. Compléter la figure de droite pour y inclure les images par ϕ des points E, F, G, H, I (on les notera E', F', G', H', I'). Justifiez votre démarche.

Exercice 4. Homographies de la droite projective

Soit $\mathbf{K}$ un corps et ϕ une homographie de $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ différente de l'identité.
Montrer qu'il y a équivalence entre

1. ϕ est une involution (c'est à dire que $\phi \circ \phi = \mathrm{id}$),
2. ϕ est de trace nulle (c'est à dire que si $\phi = \mathbf{P}(f)$ pour $f \in GL_2(\mathbf{K})$, alors $\mathrm{tr}(f) = 0$),
3. il existe un point $p \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ tel que $\phi(p) \neq p$ et $\phi(\phi(p)) = p$.

Exercice 5. Projections affines

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$.

1. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{F} \cap (M+G)$ est un singleton. On note $p_{\mathcal{F},G}(M)$ son unique élément. Montrer que $p_{\mathcal{F},G}(M)$ est l'unique point $M' \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in G$.
2. Montrer que l'application $p_{\mathcal{F},G}$ est affine et déterminer sa partie linéaire $\overrightarrow{p_{\mathcal{F},G}}$. L'applicatoin affine $p_{\mathcal{F},G}$ est appelée la *projection affine* sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.
3. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants
   (a) On a $f \circ f = f$.
   (b) On a $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$ et il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = M$.
   (c) L'application f est une projection affine (c'est-à-dire : il existe un s.e.a. $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ de direction F et un s.e.v. G de E vérifiant $E = F \oplus G$, tels que l'on ait $f = p_{\mathcal{F},G}$).