
Examen final du 14 mai 2025

Durée : 1h30

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Pour les exercices 1 à 5, la notation prendra en compte la qualité et la clarté de la rédaction.

Exercice 1. 1. Rappeler la définition de l'espace projectif associé à un espace vectoriel.

Solution. Cf cours

2. Montrer que dans un plan projectif, deux droites projectives distinctes s'intersectent en exactement un point.

Solution. Soit $\mathbf{P}(E)$ un plan projectif, associé à un espace vectoriel E de dimension 3. Soient d_1 et d_2 deux droites projectives, images par l'application canonique de sous-espaces vectoriels D_1 et D_2 de E de dimension 3. Si on suppose d_1 et d_2 distinctes, alors $D_1 \neq D_2$ et donc $D_1 + D_2 = E$. La formule de Grassmann implique que $\dim(D_1 \cap D_2) = 1$, et donc il existe une seule droite vectorielle contenue dans $D_1 \cap D_2$, d'où le résultat.

Exercice 2. 1. Dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbb{R}^4)$ associé à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, donner un exemple d'un triplet de droites projectives (d_1, d_2, d_3) deux à deux disjointes.

Solution. De façon équivalente, on donne trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ deux à deux d'intersection réduite à $\{0\}$. Par exemple $E_1 = \text{vect}(e_1, e_2)$, $E_2 = \text{vect}(e_3, e_4)$ et $E_3 = \text{vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_4)$.

2. Soient d_1, d_2, d_3 trois droites projectives deux à deux disjointes dans $\mathbf{P}(\mathbb{R}^4)$. Montrer que pour tout point $A \in d_1$, il existe une droite projective qui contient A et intersecte d_2 et d_3 .

Solution. Soient E_2 et E_3 les sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ correspondant à d_2 et d_3 , et soit F la droite vectorielle de $\mathbb{R}^4$ correspondant au point A . Puisque $F \cap E_2 = F \cap E_3 = \{0\}$, les sous-espaces vectoriels $F + E_2$ et $F + E_3$ sont de dimension 3. Soit $G = (F + E_2) \cap (F + E_3)$. On a $\dim G = \dim(F + E_2) + \dim(F + E_3) - \dim(F + E_2 + F + E_3) = 2$ (car $E_2 + E_3 = \mathbb{R}^4$, puisque $E_2 \cap E_3 = \{0\}$). On a $F \subsetneq G \subsetneq F + E_2$ et $F \subsetneq G \subsetneq F + E_3$. Le sous-espace projectif correspondant à G est une droite projective qui contient A et intersecte à la fois d_2 et d_3 .

Exercice 3. Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{E}$. Soit $M \in \mathcal{E}$. On rappelle qu'il existe un unique triplet (α, β, γ) de nombres réels vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$ tel que M soit le barycentre $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. Ce sont les coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A, B, C) .

1. A quelles conditions sur (α, β, γ) est-ce que le point M appartient à la droite (AB) ?

Solution. Les points A et B ont pour coordonnées barycentriques $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. La droite (AB) , ensemble des barycentres de A et B , est l'ensemble des points ayant pour coordonnées barycentriques $(t, 1 - t, 0)$ pour $t \in \mathbb{R}$. La condition est donc $\gamma = 0$.

Soit A' (respectivement B' , C') un point de la droite (BC) (respectivement (AC) , (AB)). On suppose que $\{A', B', C'\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$ et que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en M .

2. Dessiner une figure illustrant les points A, B, C, A', B', C', M .

3. Montrer que les hypothèses impliquent $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, $\gamma \neq 1$.

Solution. Si $\alpha = 1$, alors les droites (AM) et (BC) sont parallèles, contredisant le fait qu'elles s'intersectent en A' . Idem pour les autres.

4. Déterminer en fonction de α, β, γ les coordonnées barycentriques de A', B' et C' .

Solution. La droite $(AA') = (AM)$ est l'ensemble des points de coordonnées barycentriques $(1-t)(1, 0, 0) + t(\alpha, \beta, \gamma) = (1-t+t\alpha, t\beta, t\gamma)$. Un tel point appartient à (BC) si et seulement si $1-t+t\alpha = 0$ ou encore $t = 1/(1-\alpha)$. Les coordonnées de A' sont donc $(0, \frac{\beta}{1-\alpha}, \frac{\gamma}{1-\alpha})$. Par un argument analogue, les coordonnées de B' et C' sont $(\frac{\alpha}{1-\beta}, 0, \frac{\gamma}{1-\beta})$ et $(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma}, 0)$.

5. Montrer que

$$\frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{A'B}} \frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}} \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = -1.$$

Solution. On lit sur les coordonnées barycentriques que A' est le barycentre $\left(\frac{B}{1-\alpha}, \frac{C}{1-\alpha}\right)$. On a donc $\frac{\beta}{1-\alpha}\overrightarrow{A'B} + \frac{\gamma}{1-\alpha}\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ et donc $\frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{A'B}} = -\frac{\beta}{\gamma}$. Par un calcul analogue, on a $\frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{B'C}} = -\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = -\frac{\alpha}{\beta}$, d'où le résultat. (On remarquera que α, β et γ sont non nuls ; si par exemple $\alpha = 0$, alors $B' = C$, ce qui est exclu).

Exercice 4. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Soient $A \neq B$ deux points de $\mathcal{P}$. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Soit $M \in \mathcal{P}$. Démontrer l'équivalence :

$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0 \iff IM = \frac{1}{2}AB$$

Solution. On a $AB^2 - (2MI)^2 = \langle \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MI} \rangle$. Comme $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, on a $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MB}$.

$$AB = 2MI \iff \langle 2\overrightarrow{AM}, 2\overrightarrow{MB} \rangle = 0 \iff \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0$$

2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon $r > 0$. Dédurre de la question précédente une construction à la règle et au compas des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de B , lorsqu'il en existe. Illustrer cette construction par un dessin sur un exemple.

Solution. On construit d'abord le milieu I du segment $[AB]$, puis le cercle $\mathcal{C}'$ de centre I et de rayon $IA = IB$. Les points d'intersection M et M' de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (s'ils existent et sont distincts de B) sont tels que les droites (BM) et (BM') sont les tangentes recherchées.

Exercice 5. Soient $A_0, \dots, A_{n+1}$ une famille de $n+2$ points d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension n .

1. Soit O un point de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.

Solution. La famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{n+1}})$ est liée puisque son cardinal excède la dimension. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_0})$$

et le résultat en découle en posant $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1})$.

2. En déduire qu'il existe une partition $\{0, \dots, n+1\} = I \cup J$ telle que

$$\text{conv}(A_i : i \in I) \cap \text{conv}(A_i : i \in J) \neq \emptyset$$

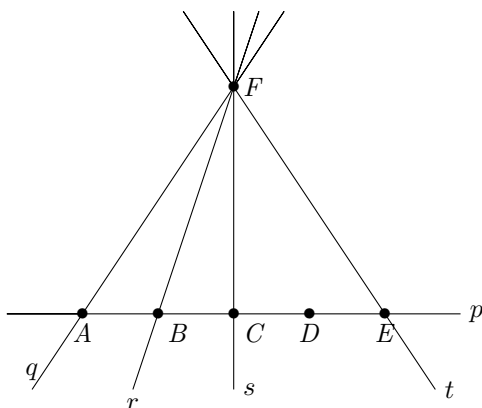
Solution. Soit $I = \{0 \leq i \leq n+1 : \lambda_i \geq 0\}$ et $J = \{0 \leq i \leq n+1 : \lambda_i < 0\}$. Puisque $\lambda_0 + \dots + \lambda_{n+1} = 0$ et que ces nombres sont non tous nuls, on a $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$. On a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) \overrightarrow{OA_j},$$

d'où l'égalité des barycentres entre $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ et $(A_j, -\lambda_j)_{j \in J}$. Ce barycentre commun est dans $\text{conv}(A_i : i \in I) \cap \text{conv}(A_j : j \in J)$

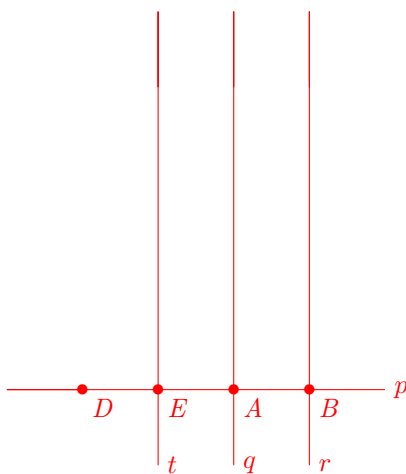
Exercice 6. Dans cet exercice, on demande de répondre uniquement par des dessins, sans justification.

Dans un plan projectif réel, on considère la configuration $\mathcal{C}$ suivante formée de 6 points A, B, C, D, E, F et de 5 droites p, q, r, s, t .



1. Tracer la configuration obtenue à partir de la configuration $\mathcal{C}$ en envoyant la droite s à l'infini.

Solution.



2. Tracer la configuration duale de la configuration $\mathcal{C}$.

Solution. En notant $a, b, \dots$ les droites duales des points $A, B, \dots$ et $P, Q, \dots$ les points duaux des droites $p, q, \dots$, on a

