Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

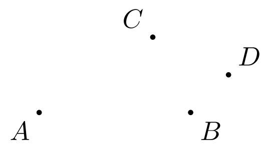
UE de Géométrie

Examen partiel du 20 mars 2025

Durée : 90 minutes

Exercice 1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soient A, B deux points de $\mathcal{E}$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer l'équivalence $(A+F)\cap(B+G)\neq\emptyset \iff \overrightarrow{AB}\in F+G$.

Exercice 2. Soient quatre points A, B, C et D d'un plan affine. Comment tracer le point qui est l'isobarycentre de ces quatre points ? Faites-le sur l'exemple suivant, à reproduire sur votre copie.



Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. On rappelle qu'une application affine $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ est une dilatation si l'application linéaire associée est $\lambda\mathrm{id}_E$ pour $\lambda\in\mathbb{R}^*$. On note $\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ le groupe des dilatations de $\mathcal{E}$.

1. Soit $f\in\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{E}$. Montrer que l'on a $f(\mathcal{D})\subset\mathcal{D}$ si et seulement si $f(\mathcal{D})=\mathcal{D}$. On dit alors que $\mathcal{D}$ est stable par f.
2. Soit $f\in\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ et soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites affines distinctes, de directions respectives D_1 et D_2. On suppose que $f\neq\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont stables par f.
   (a) Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent en M, montrer que f est une homothétie de centre M.
   (b) Si $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\emptyset$, montrer que f est une translation de vecteur $u\in D_1\cap D_2$.
3. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de direction D. On note $S=\{f\in\mathrm{Dil}(\mathcal{E})\ :\ \mathcal{D}\text{ est stable par }f\}$. Montrer que S est le sous-groupe de $\mathrm{Dil}(\mathcal{E})$ formé des translations de vecteur appartenant à D et des homothéties de centre appartenant à $\mathcal{D}$. Ce sous-groupe est-il commutatif ?

Exercice 4. Dans un plan affine $\mathcal{E}$ de direction E, on considère deux triplets de droites $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3)$ et $(\mathcal{D}'_1,\mathcal{D}'_2,\mathcal{D}'_3)$, deux à deux distinctes et concourantes respectivement en O et O'. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une bijection affine du plan envoyant le premier triplet sur le second.

1. Soient A un point de $\mathcal{D}_1$ distinct de O, B le projeté de A sur $\mathcal{D}_2$ parallèlement à $\mathcal{D}_3$ et C le projeté de A sur $\mathcal{D}_3$ parallèlement à $\mathcal{D}_2$. Soient, de même, A' un point de $\mathcal{D}'_1$ distinct de O', B' le projeté de A' sur $\mathcal{D}'_2$ parallèlement à $\mathcal{D}'_3$ et C' le projeté de A' sur $\mathcal{D}'_3$ parallèlement à $\mathcal{D}'_2$.
   Montrer que $(O,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ et $(O',\overrightarrow{O'B'},\overrightarrow{O'C'})$ sont deux repères du plan. Donner les coordonnées de A dans le premier repère et celles de A' dans le second.
2. En déduire qu'il existe une unique bijection affine f du plan telle que $f(O)=O'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$ et $f(A)=A'$.
3. Montrer que pour $i=1,2,3$, $f(\mathcal{D}_i)=\mathcal{D}'_i$.
4. Si f et g sont deux bijections affines du plan telles que $f(\mathcal{D}_i)=\mathcal{D}'_i$ et $g(\mathcal{D}_i)=\mathcal{D}'_i$ pour $i=1,2,3$, montrer que $f^{-1}\circ g$ est une homothétie de centre O.